

ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

Аутор: ДРАГАНА КОЈИЋ

е-маил: dragana.kojic@student.ffuis.edu.ba

Ментор: проф. др Видан Говедарица

Филозофски факултет Пале Универзитета у Источном Сарајеву

Увод: Класични ортогонални полиноми као што су Laguerreovi, Hermiteovi и Chebyshevi полиноми имају широку примену у различитим областима науке и инжењерства.

Циљ: Намера овог истраживачког рада је да се прикажу нека од недавних истраживања ортогоналних полинома, са посебним нагласком на њихове аналитичке особине и теорију апроксимација.

Метод: У раду је примењен квантитативно-квалитативни научни метод. Истраживачки рад је заснован на студирању научне грађе, одакле су преузимани и обрађивани подаци значајни за ову тему.

Резултати: Долази се до резултата да се савремена истраживања из теорије вероватноће, теорије графова, кодирања итд. ослањају на знања из области ортогоналних полинома. Рад представља резултате теоријског истраживања између односа ортогоналних полинома и њихове примене у конкретним рачунским задацима. Приказане су кључне особине ових полинома илустроване одабраним примерима који омогућавају боље разумевање њихове структуре и практичне примене.

Закључак: Апроксимација преносне функције филтра ниских фреквенција је заснована на једноставној адаптацији ортогоналних Јакобијевих полинома. Gauss-ова интеграција представља моћан нумерички алат за апроксимацију интеграла, користећи посебно одабране тачке и тежинске функције како би се постигла максимална тачност уз минималан број рачуна. Ортогонални полиноми представљају везу математике са инжењерским дисциплинама, па је изучавање особина ортогоналних полинома од велике важности.

Кључне речи: ортогонални полиноми, диференцијална једначина, ортогонална функција.

УВОД

Класични ортогонални полиноми први пут се појављују у делу француског математичара А. М. Legendrea (1). Legendre-ови полиноми и њихове ортогоналне особине испитивани су још крајем 18. века приликом одређивања сила привлачења између небеских тела [1 – 2].

Настали су решавањем диференцијалних једначина¹ и имају широк спектар примена у разним подручјима математике и физике (2), а недуго након тога,

¹ Једначина у којој се појављује непозната функција, заједно са својим изводима назива се диференцијална једначина.

проблем интеграћења линеарне диференцијалне једначине првог реда своди се на проблем квадратуре. Период од почетног открића општих метода интеграћења обичних диференцијалних једначина завршен је 1775. године [8 – 10].

За многе проблеме, формалне методе нису биле довољне. Као резултат решавања диференцијалних једначина на бесконачним и полубесконачним интервалима дошло се до *Hermite-ових* полинома. Средином 19. века пронађени су и *Laguerre-ови* полиноми. Поменути типови полинома, ортогонални на реалној правој у односу на одређену тежинску функцију, још од *Gauss-овог* времена се користе за нумеричку процену интеграла. Чебишев је током свог рада открио да од свих апроксимативних полинома произвољне функције на интервалу $[-1, 1]$, најбољу минимизацију максималне грешке омогућава линеарна комбинација полинома који се данас називају *Чебишевљеви полиноми* (3). Проучавање ових и других функција које су решења једначина хипергеометријског типа довело је до савремених нумеричких метода [4 – 5]. Ортогонални полиноми су и својим пореклом и развојем везани за практичну примену.

Значај истраживања ове теме огледа се у великом броју импликација и примена тих истраживања, како у примењеној математици, тако и у многим другим областима науке.

Хипотеза: повезивање апстрактне математичке теорије са могућностима примене у решавању реалних проблема.

Зашто су ортогонални полиноми важни?

Применом ортогоналних полинома можемо да поједноставимо сложене математичке проблеме, као на пример да сложене функције изразимо као збир једноставнијих, што је посебно корисно у областима попут обраде сигнала и статистичке анализе. Користе се у:

- Теорији апроксимација: за апроксимацију функција помоћу коначног броја чланова;
- Нумеричкој интеграцији: за конструисање *Gauss-ових* квадратурних правила за нумеричку интеграцију;
- Решавању диференцијалних једначина;
- Инженерству: Од седамдесетих година прошлог века јављају се бројни патенти и практичне примене ортогоналних функција у електростатици, електроници, телекомуникацијама, адаптивном управљању, апроксимацији модела, дигиталној обради сигнала.

Циљ истраживања је да се прикажу нека од недавних истраживања ортогоналних полинома, са посебним нагласком на њихове аналитичке особине и теорију апроксимација.

Постоји више типова ортогоналних полинома, као што су: *Legendre-ови*, *Chebyshev-евљеви*, *Hermite-ови*, *Laguerre-ови*.

Legendre-ови полиноми се користе за решавање проблема везаних за сферне координате и гравитациони потенцијал.

Chebyshev-евљеви полиноми се користе у теорији апроксимација и веома су корисни у нумеричкој анализи.

Hermite-ови полиноми се често појављују у квантној механици и теорији вероватноће (4).

Користећи *Laguerre-ове* функције (филтре), било која функција или сигнал се може описати као бесконачна сума ортогоналних функција.

ОСОБИНЕ ОРТОГОНАЛНИХ ПОЛИНОМА

Како и сам назив каже, ортогонални полиноми су везани за појам ортогоналности у математици. Подсетимо се појма ортогоналности између вектора. Два вектора a и b су *ортогонална* ако је њихов унутрашњи производ $\langle a, b \rangle = 0$. У том случају, пројекција једног вектора на други је тачка и добијамо растојање једнако 0. Вектори су *ортонормирани* ако су међусобно ортогонални и сваки има норму 1.

Gram-Schmidt-ов поступак ортонормализације претвара линеарно независне векторе у ортонормиране векторе. Објаснимо ову процедуру на примеру.

Пример 1. Посматрајмо три вектора $a(1, -1, 1)$, $b(1, 0, 1)$, $c(1, 1, 2)$. Ортонормирани вектори су: 1. $u = a = (1, -1, 1)$

$$2. v = b - \left(\langle b, u \rangle \cdot \frac{u}{\|u\|^2} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$3. w = c - \left(\langle c, u \rangle \cdot \frac{u}{\|u\|^2} \right) - \left(\langle c, v \rangle \cdot \frac{v}{\|v\|^2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Gram-Schmidt-ов поступак ортонормализације примењујемо и на полиноме да бисмо добили ортогоналне полиноме. На пример, примењујући поступак ортонормализације на $[1, x, x^2, \dots]$ добијамо фамилију ортогоналних полинома.

Дефиниција 1. (5) За фамилију полинома p_n , $n \in \mathbb{N}$ кажемо да је ортогонална на сегменту $[a, b]$, ако је њихов скаларни производ, у односу на тежинску функцију ω , $\omega(x) \geq 0$ на $[a, b]$, једнак нули, тј.

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_a^b p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = 0.$$

Норму полинома p на интервалу (a, b) , где је ω тежинска функција,

рачунамо на следећи начин:

$$\|p\| = \sqrt{\int_a^b \omega(x)p(x)^2 dx}.$$

Полиноме који су ортогонални и нормирани називамо *ортонормираним* полиномима.

Следећа теорема доказује егзистенцију ортогоналних низова полинома.

Теорема 1. (6) *За сваки произвољно изабрани сегмент $[a, b]$ и тежину $\omega(x) \geq 0$ постоји само један ортонормирани низ полинома који означавамо са $\{p_n^*\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

Нека је $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ низ ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију ω на (a, b) . Важе следеће теореме:

Теорема 2. (6) *Између три узастопна полинома у низу $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ постоји рекурентна релација*

(1.3)

$$p_{n+1}(x) - (\alpha_n x + \beta_n) p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x) = 0$$

где су $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ константе.

Теорема 3. (6) *Нека је $\{p_n^*\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ортонормиран низ полинома. Тада важи следећа сумациона формула*

(1.4)

$$\sum_{k=0}^n p_k^*(x) p_k^*(t) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{p_{n+1}^*(x) p_n^*(t) - p_n^*(x) p_{n+1}^*(t)}{x - t}$$

где је α_n константа која се јавља у рекурентној релацији (1.4).

Формула (1.4) се назива *Christoffel–Darboux*-овом формулом. Први ју је извео *Christoffel* само за *Legendre*-ове полиноме, уопштење на ортогоналне полиноме са произвољном тежином дао је *G. Darboux* [стр. 96].

Ортогонални полиноми се могу дефинисати користећи функцију изводницу. Општи облик функција изводница за ортогоналне полиноме је

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) t^i,$$

где је (a_i) низ реалних бројева. (5)

Нека је $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ низ ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију ω на (a, b) . Ортогонални полиноми задовољавају диференцијалну једначину:

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

где су p_0, p_1 и p_2 полиноми који одговарају различитим врстама ортогоналних полинома. (5)

МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДЕ

Научна истраживања почињу сакупљањем чињеница и података потребних за доказивање или оповргавање постављене хипотезе.

Процес научног истраживања спроведен је у више корака применом следећих метода:

- Индуктивна метода – на основу анализе доступне литературе и примера изведени су општи закључци који воде ка формулисању хипотезе. (Хипотеза: повезивање апстрактне математичке теорије са могућностима примене у решавању реалних проблема).
- Метода компилације – често се користи у научно-истраживачким радовима, а односи се на интегрисање информација добијених из различитих извора у јединствену целину, са циљем омогућавања ефикаснијег прегледа досадашњих научних резултата који су релевантни за дату тему.
- Обрада података и систематизација добијених у претходним корацима.
- Синтеза изложених чињеница – доводи до закључка рада.

У раду се примењује диференцијални и интегрални рачун. Писање овог математичког рада захтева једноставне симболе, неке од њих нам је подарио славни математичар *Lajbnic* нам је подарио ознаке d за диференцијале и $\int$ за интеграле. (7) Позната је изјава *Lajbnica*: „Све сам више уверен у корисност и озбиљност ове науке и видим да је врло мало људи схватило њене размере. Та се карактеристика састоји од одређеног писма или језика. Незналица неће моћи да употребљава то писмо или ће у покушају да се њиме служи постати учен” [стр. 10]. Математички текст који је написан једноставно лакше се разуме и примењује у решавању реалних проблема.

РЕЗУЛТАТИ

Научни истраживачки подаци су расути и треба их одређеним системом

прикупити.

Улога научних података је да се научни истраживачи информишу о томе докле је стигла научна теорија у вези са одабраним предметом истраживања, како би се на основу тог прикладно лоцирало ново научно истраживање.

Legendre-ови полиноми

Дефиниција 2. (5) Полиноми $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ су *Legendre-ови* полиноми, ако су ортогонални у односу на тежинску функцију $p(x) = 1$ на интервалу $(a, b) = [-1, 1]$. [стр. 29].

Legendre-ова диференцијална једначина има облик

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0.$$

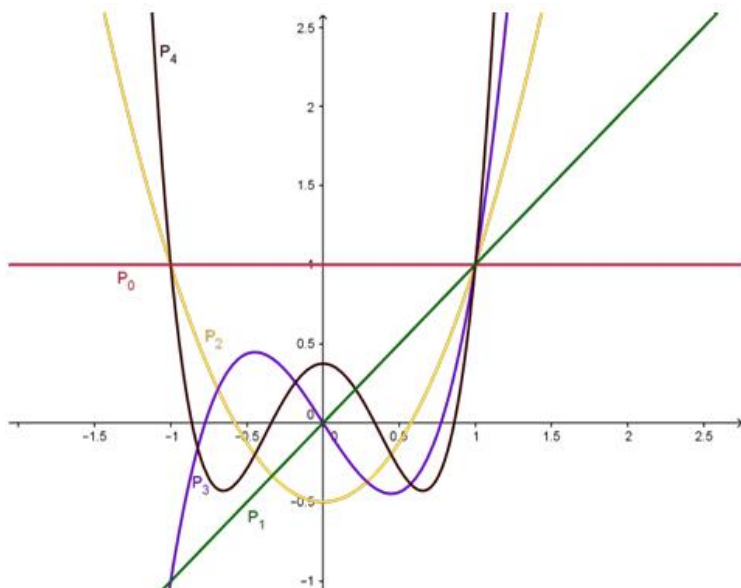
чије је једно партикуларно решење *Legendre-ов* полином

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{2k-2i}{k} x^{k-2i}$$

за који важи

$$P_k(-x) = P_k(x), \quad P_k(\pm 1) = (\pm 1)^k, \quad P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}.$$

Пример 2. (5) Првих неколико *Legendre-ових* полинома су:



Слика бр. 1 Првих пет *Legendre-ових* полинома

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}$$

Следећа формула изражава чињеницу да *Legendre-ovi* полиноми $P_0(x), P_1(x), \dots$ представљају ортогоналан систем функција на сегменту $[-1, 1]$. Релација (2.1) је карактеристична за *Legendre-ове* полиноме [21 – 22].

(2.1)

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Чебишевљеви полиноми

(2.6)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k} \quad (n \geq 1) \quad T_0(x) = 1.$$

Полиноми (2.6) зову се *Чебишевљеви* полиноми.

Чебишевљева диференцијална једначина:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

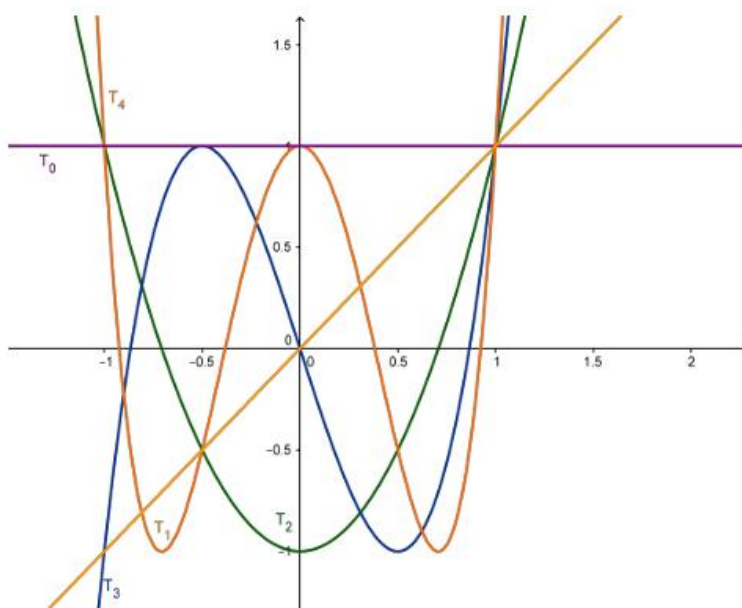
Једно њено партикуларно решење је полином T_n , а друго:

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x).$$

Чебишевљеви полиноми прве врсте дефинисани су идентитетом $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. (5) Након увођења смене $x = \cos \theta$, долазимо до формуле за израчунавање *Чебишевљевих* полинома прве врсте:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Пример 3. (5) Неколико првих Чебишевљевих полинома су:



Слика бр. 2 Првих пет Чебишевљевих полинома

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

Хермите-ови полиноми

Хермите је 1864. године дефинисао полиноме H_n . (6) Међутим, још 1859. Чебишев је дефинисао полиноме H_n и стога их у руској математичкој литератури називају Чебишев–Хермитеови полиноми.

H_n се може изразити у облику:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

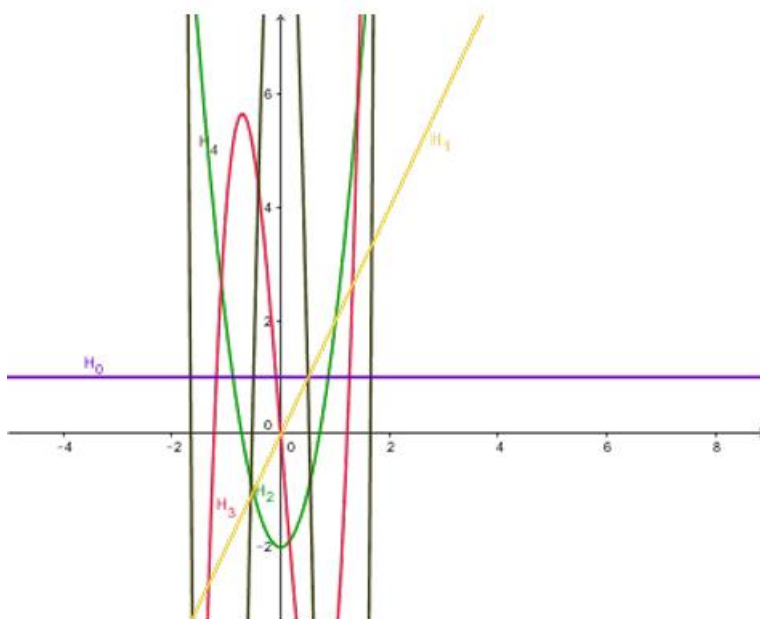
H_n је полином степена n и назива се Хермите-ов полином.

За Хермите-ове полиноме H_m и H_n важи формула:

(3.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}.$$

Пример 4. (5) Првих неколико Хермите-ових полинома



Слика бр. 3 Првих пет Хермите-ових полинома

$$H_0 = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

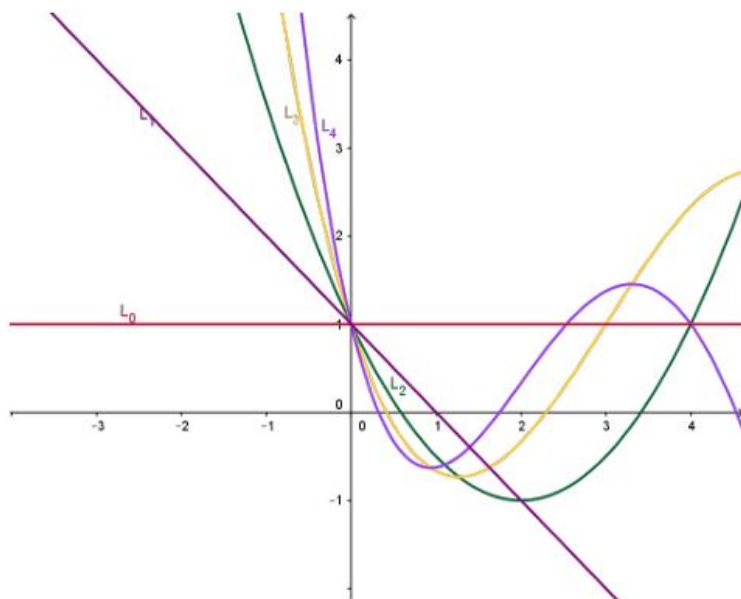
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Laguerre-ови полиноми

$$L_n(x) = (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right).$$

L_n је полином n степена и назива се *Laguerre-ов полином*, а $t \rightarrow f(t)$ генератриса *Laguerre-ових* полинома. Полином L_n дефинисао је 1879. француски математичар *E. Laguerre*. (6)

Пример 5. (5) Неколико првих *Laguerre*-ових полинома су:



Слика бр. 4 Првих пет *Laguerre*-ових полинома

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= 2 - 4x + x^2, \\ L_3(x) &= 6 - 18x + 9x^2 - x^3, \\ L_4(x) &= 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4. \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn}.$$

За функције $x \rightarrow L_m(x)$ и $x \rightarrow L_n(x)$ каже се да су ортогоналне у интервалу $(0, +\infty)$ са тежином e^{-x} . (6)

ДИСКУСИЈА

Сви претходно наведени резултати недвосмислено указују да је хипотеза коју смо поставили на почетку истраживања тачна. Да бисмо образложили закључак до којег смо дошли, у овом одељку ћемо детаљно дискутовати о неким од

најзначајнијих примена ортогоналних полинома како у математици, тако и ван ње. С обзиром на то да је овде истакнут интердисциплинарни приступ, наредна образложења могу иницирати евентуалне нове токове истраживања и у другим наукама, те стога опширну дискусију добијених резултата сматрам не само оправданом, него и пожељном.

Примене ортогоналних полинома

Gauss-ове квадратурне формуле

Gauss-ово интеграцијско правило, названо по *Carlu Friedrichu Gaussu*, је интеграцијско правило конструисано да даје тачан резултат за полиноме степена $2n - 1$ или мање, одабиром одговарајућих чворова x_i и тежинских функција p_i за вредности $i = 1, \dots, n$. Модерна формулација која користи ортогоналне полиноме развијена је од стране *Carl Gustava Jacobi* 1826. године. *Gauss-ова* интеграција се заснива на следећој формули:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

где је $f(x)$ ненегативна функција која је интегрална на интервалу $[a, b]$. Може се показати да су квадратурни чворови x_i корени полинома који припада класи ортогоналних полинома. (8)

Код поделе *Gauss-ових* интеграцијских правила, најважнији појам је тежинска функција, јер она одређује како су различити делови интервала интеграције пондерирани. (8)

Други појам је интервал интеграција, где су неки интервали ограничени, попут $[-1, 1]$, други су бесконачни $[0, \infty)$. Зависно од наведених својстава, постоје различита *Gauss-ова* интеграцијска правила, од којих су нека најпознатија наведена у Табели бр. 1. [22 – 23].

Тежинска функција	Интервал	Интеграцијско правило
1	$[-1, 1]$	<i>Gauss-Legendre</i>
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	<i>Gauss-Čebišev</i>
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	<i>Gauss-Čebišev 2. vrste</i>
e^{-x}	$[0, \infty)$	<i>Gauss-Laguerre</i>
e^{-x^2}	$(-\infty, +\infty)$	<i>Gauss-Hermite</i>

Табела бр. 1 Различите *Gauss-ове* интеграцијске формуле

Ентропија

Теорија информација је научна дисциплина заснована на вероватноћи и статистици, а бави се нумеричким одређивањем количине информација у системима (9).

Занимљив је случај када је $\rho(x) = |\Psi(x)|^2$, где је $\Psi(x)$ таласна функција у квантномеханичком систему. Тада се таласна функција може изразити помоћу ортогоналних полинома, а приликом рачунања појављују се интеграл облика:

$$E(p_\mu) = - \int_a^b [p_\mu(x)]^2 \log[p_\mu(x)]^2 \omega(x) dx,$$

где је $\{p_\mu(x), \mu \in \mathbb{N}^0\}$ фамилија ортогоналних полинома на сегменту $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\omega(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, тежинска функција [стр. 22].

Laguerre-ови филтери

Laguerre-ове функције се користе у обради сигнала и анализи система где се користе за декомпозицију сигнала (10). Чињеница је да је њихов *Laplace-ов* трансформат коначнодимензионална рационална функција. То омогућава њихову коначнодимензионалну реализацију у простору стања, која у облику филтера омогућава примену у реалном времену.

Приликом управљања аутономним летелицама, велики је проблем појава вањских утицаја попут ветра, које за последицу имају смањење тачности слеђења референтне трајекторије. *Laguerre-ови* филтери су заправо нека врста универзалних апроксиматора заданих сигнала или параметара динамичких система [1 – 3].

ЗАКЉУЧАК

Ортогонални полиноми имају широку примену у науци и инжерњерству.

Ортогоналне функције, као што су *Lagrange-ове* и *Hermite-ове* функције се користе за декомпозицију сигнала. Једна од посебно занимљивих функција које се користе у аутоматици су *Laguerre-ове* функције.

Апроксимација преносне функције филтра² ниских фреквениција је заснована на једноставној адаптацији ортогоналних Јасобије-вих полинома. (10)

Gauss-ова интеграција представља моћан нумерички алат за апроксимацију

² Електрични филтри су кола која обликују фреквенцијски спектар улазног електричног сигнала на основу прописаних захтева.

интеграла, користећи посебно одабране тачке и тежинске функције како би се постигла максимална тачност уз минималан број рачуна.

Из свих наведених разлога, изучавање особина ортогоналних полинома је од велике важности. Ортогонални полиноми представљају везу математике са инжењерским дисциплинама.

Литература

- [1] **Matejić, M.** *Razvoj racionalnih algoritama za konstrukciju ortogonalnih polinoma jedne promenljive, doktorska disertacija.* Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno-matematički fakultet, 2016.
<https://ff.unze.ba/nabokov/seminarskiRadovi/zborniciRadova/Ortogonalni%20polinomi%20za%20zbornik%20radova%20v3.pdf>
- [2] **Šobić, J.** *Diferencijalne jednačine u nastavi matematike, master rad*, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. Beograd: s.n., 2012.
<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/5142/Master.pdf?sequence=1>
- [3] **Milojković, M.** *Primena ortogonalnih funkcija u modeliranju dinamičkih sistema i upravljanju sistemima sa fazi kliznim režimima, doktorska teza,* Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet u Nišu. 2011. <http://phaidrani.ni.ac.rs/o:827>
- [4] **A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, M. L. Yattslev.** *Strong Asymptotics of Multiple Orthogonal Polynomials for Angelesco Systems. Part I: Non-Marginal Directions.* 2024.
<https://arxiv.org/abs/2404.14391>
- [5] **Volmut, V.** *Ortogonalni polinomi, diplomski rad.* s.l.: Sveuciliste Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2018.
<https://zir.nsk.hr/en/islandora/object/mathos%3A87/datastream/PDF/view>
- [6] **Mitrinović, D.S.** *UVOD U SPECIJALNE FUNKCIJE.* Beograd: Građevinska knjiga, 1972.
- [7] *Tretiranje podataka u naučnim istraživanjima.* **prof. dr Tihomir Radovanović, dr Marko Filijović, prof. dr Pavle Radanov.** Pirot: Regionalni razvoj i prekogranična saradnja, zbornik radova, decembar 2021. <https://www.konferencija2021.komorapirot.com/pdf/Zbornik2021.pdf>
- [8] **Žefran, D.** *Gaussova integracija, završni rad.* Rijeka: Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, rujan 2024. <https://repository.riteh.uniri.hr/islandora/object/riteh%3A4667/datastream/PDF/view>
- [9] **Ujić, N.** *Gegenbauerovi polinomi, završni rad.* Osijek: Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2021.
<https://zir.nsk.hr/islandora/object/mathos%3A549/datastream/PDF/view>
- [10] **Kantolić, D.** *Upravljanje autonomnim letjelicama primjenom adaptivnih Laguerreovih filtera.* Zagreb: Sveuciliste u Zagrebu, Fakultet Strojarsva i brodogradnje, 2019.
<https://repositorij.fsb.unizg.hr/islandora/object/fsb%3A5023/datastream/PDF/view>

ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Author: DRAGANA KOJIĆ

Email: dragana.kojic@student.ffuis.edu.ba

Mentor: Full Prof. Vidan Govedarica

Faculty of Philosophy, University of East Sarajevo

Introduction: Classical orthogonal polynomials such as the Legendre, Laguerre, Hermite, and Chebyshev polynomials have a wide range of applications across various domains of science and engineering.

Aim: The aim of this research paper is to present selected recent developments in the theory of orthogonal polynomials, with particular emphasis on their analytical properties and their role in approximation theory.

Methods: The study employs a combined quantitative-qualitative research methodology. It is based on the analysis of relevant scientific literature, from which data significant to the subject matter were collected, interpreted, and systematically examined.

Results: The results indicate that contemporary research in probability theory, graph theory, coding theory, and related areas increasingly relies on the theory of orthogonal polynomials. This paper provides a theoretical analysis of the connection between orthogonal polynomials and their applications in specific computational problems. Fundamental properties of these polynomials are presented and illustrated through selected examples that contribute to a clearer understanding of their structure and practical relevance.

Conclusion: The approximation of the transfer function of a low-pass filter can be achieved through a straightforward adaptation of orthogonal Jacobi polynomials. Furthermore, Gaussian quadrature represents a powerful numerical technique for the approximation of definite integrals, utilizing optimally chosen nodes and weight functions to achieve high accuracy with minimal computational effort. Orthogonal polynomials thus serve as a significant link between pure mathematics and engineering disciplines, highlighting the importance of further study on their properties and applications.

Keywords: orthogonal polynomials; differential equations; orthogonal functions