

ISSN 2637-2266 (Print)
ISSN 2637-2274 (Online)

18. Naučno-stručni skup
Studenti u susret nauci – StES 2025

ZBORNIK RADOVA

Inženjerstvo i tehnologija

18th scientific conference
Students encountering science – StES 2025

PROCEEDINGS

Engineering and Technology

Banja Luka
2025.

Izdavači:
Univerzitet u Banjoj Luci,
Studentski parlament Univerziteta u Banjoj Luci

Za izdavača:
Prof. dr Aleksandar Ostojić
Valentina Knežević

Urednik/ci:
Dragan Milivojša, dipl.inž.maš

Lektor za srpski jezik:
Aleksandra Savić

Lektor za engleski jezik:
Milica Guzijan

Naučni odbor:
Prof. dr Milica Balaban, prof. dr Kristina Pantelić Babić, prof. dr Aleksandar Ostojić,
prof. dr Dalibor Kesić, prof. dr Milenko Krajišnik, prof. dr Ranko Škrbić, prof. dr Saša Čvoro,
prof. dr Goran Trbić, prof. dr Ranka Perić-Romić, prof. dr Biljana Babić

Recenzenti:
Prof. dr Valentina Golubović Bugarski, redovni profesor;
Prof. dr Rada Petrović, redovni profesor; Prof. dr Bojan Z. Knežević, vanredni profesor;
Prof. dr Vladimir Risojević, redovni profesor; dr Goran Jotić, docent; dr Ivana Savković, docent

SADRŽAJ

RADOVI:

ANĐELA PETROVIĆ, DOBIJANJE BIOKOMPOZITNIH SKAFOLDA NA BAZI MULTIDOPIRANOG KALCIJUM-HIDROKSIAPATITA I BIORAZGRADIVOG POLIMERA PRIMENOM 3D ŠTAMPE.....	7
MARKO SIMONIČ, Goran Mundar, Rudolf Leon Filip, USER-FRIENDLY INTERFACE FOR TRAINING AND DEPLOYMENT OF YOLO MODELS FOR OBJECT DETECTION.....	19
MARIJA MALIĆ, MATEMATIČKO MODELOVANJE PUTANJE VODENIH MLAZOVA U ZABAVNIM PARKOVIMA: PRIMJENA LAGRANŽOVE INTERPOLACIJE I MEHANIKE PROJEKTILA	29

RADOVI

DOBIJANJE BIOKOMPOZITNIH SKAFOLDA NA BAZI MULTIDOPIRANOG KALCIJUM-HIDROKSIAPATITA I BIORAZGRADIVOG POLIMERA PRIMENOM 3D ŠTAMPE

Autor: ANĐELA PETROVIĆ

e-mail: andjelapetrovic478@gmail.com

Mentor: prof. dr Đorđe Veljović, as. dr Tamara Matić,

Katedra za neorgansku hemijsku tehnologiju

Tehnološko-metalurški fakultet Univerziteta u Beogradu

Uvod: Usled nedostataka koštanih graftova, razvijeno je inženjerstvo košanog tkiva, koje podrazumeva primenu skafolda – privremenog 3D nosača ćelija. Kalcijum-hidroksiapatit (HAP) se koristi kao biomaterijal za skafolde zbog svoje sličnosti sa biološkim apatitom. Kristalna struktura HAP-a omogućava supstituciju jona stroncijuma, magnezijuma, cinka i bakra, koji poboljšavaju angiogenezu, proliferaciju i osteogenu diferencijaciju ćelija uz antimikrobno dejstvo. Međutim, krtoost keramičkih materijala onemogućava njihovu primenu na mestima većeg opterećenja, pa je poželjno razviti biokompozitne materijale koji simuliraju koštano tkivo.

Cilj: Cilj ovog istraživanja je razvoj biokompozitnih skafolda na bazi multidopiranog HAP-a i biorazgradivog fotoumrežavajućeg polimera polietilen glikol diakrilata (PEGDA) pomoću 3D štampe na bazi mask-stereolitografije (mSLA).

Materijal i metode: Prah hidroksiapatita je dopiran tokom hidrotermalne sinteze sa 2 mol.% Sr, 3 mol.% Mg, 0,4 mol.% Zn i 0,4 mol.% Cu. Morfologija, elementi i fazni sastav čestica su određeni pomoću SEM, EDS i XRD analize. Biokompozitni skafoldi su dobijeni umešavanjem različitih udela multidopiranog HAP-a (0 mas.%, 5 mas.% i 10 mas.%) u mastilo na bazi PEGDA i 3D štampani, nakon čega su poređene struktura i pritiska čvrstoća dobijenih skafolda.

Rezultati: Biokompozitni 3D štampani skafoldi na bazi HAP i PEGDA su uspešno dobijeni metodom mSLA. Skafoldi sa 5% HAP su pokazali poboljšana mehanička svojstva, dok je 10% HAP prouzrokovalo prevelik stepen umreženja i pogoršana mehanička svojstva.

Zaključak: Metoda mSLA je pogodna za sintezu biokompozitnih skafolda i buduća ispitivanja će se baviti pronalaženjem drugih polimernih matrica kako bi se omogućila inkorporacija veće količine čestica HAP.

Ključne reči: skafold, kalcijum-hidroksiapatit, polietilen glikol diakrilat, 3D štampa, mask-stereolitografija.

UVOD

Inženjerstvo košanog tkiva predstavlja složen interdisciplinarni pristup rešavanju problema koštanih graftova u trenutnoj praksi. Uključeno je korišćenje različitih bioloških i inženjerskih principa kako bi se konstruisale strukture koje mogu obnavljati i održavati normalnu funkciju oštećenih i obolelih kostiju. Ovaj pristup zahteva razvoj biomaterijala sa što sličnijom strukturom i osobinama kostiju i njihovoj preciznoj fizičko-hemijskoj i biološkoj analizi [7].

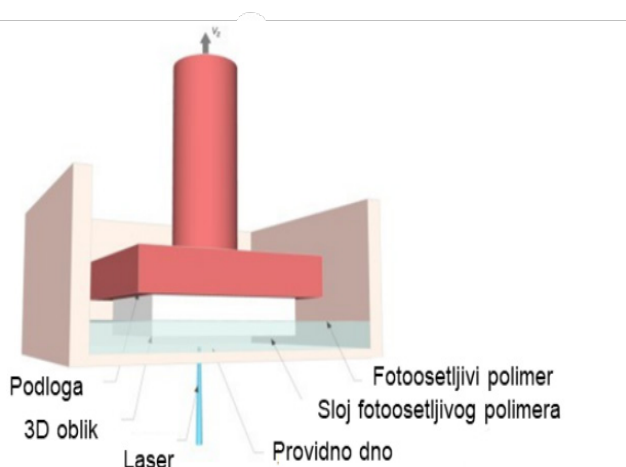
Biomaterijali predstavljaju materijale sa odgovarajućim strukturnim, mehaničkim i biološkim karakteristikama, koji pronalaze potencijalnu primenu u regenerativnoj medicini. Biomaterijali u inženjerstvu košanog tkiva se najčešće sintetišu u vidu makroporoznih struktura.

Skafoldi su specifično dizajnirani privremeni nosači ćelija sa definisanom poroznošću

i strukturom pora, koja je ujedno povoljna za adheziju i proliferaciju ćelija, ali i za vaskularizaciju novonastalog tkiva. Skafold takođe predstavlja i strukturnu podršku za olakšano vođenje procesa zarastanja oštećenih delova koštanog tkiva.

Skafold treba da bude procesiran tako da poseduje biodegradibilnost, biokompatibilnost, bioaktivnost, kao i da ispunjava specifične zahteve oblika i veličine samog defekta. Sa tehnološke tačke gledišta, veliki izazov je dizajniranje ovako specifičnog biomaterijala koji je pogodan za adheziju ćelija i koji može da se održi u dovoljno dugom vremenu u ljudskom telu [6].

U zavisnosti od uloge i vrste materijala od kog se skafold izrađuje, postoje različite metode za procesiranje ovih makroporoznih nosača ćelija. U ovom radu je za procesiranje biokompozitnih skafolda na bazi polimerne matrice i keramičkog punioca korišćena mask-stereolitografska metoda 3D štampe (Slika 1.).



Slika 1. Šematski prikaz mSLA uređaja po *bottom-up* pristupu

Mask-stereolitografska (mSLA) tehnika 3D štampe koristi ultraljubičasto (UV) zračenje za očvršćavanje datih područja fotopolimera na površini nekog materijala, prilikom čega dolazi do nastajanja 3D oblika prema softverski zadatom modelu. Ova tehnologija je pogodna zbog mogućnosti izrade složenih 3D delova bez kalupa u kratkom vremenu. Proces štampanja temelji se na korišćenju programskog modela 3D oblika koji je podeljen u niz 2D slojeva poprečnog preseka. Pomoću mSLA metode tanki slojevi fotoosetljivog monomera postupno se po zadatim maskama izlažu UV zračenju do izrade konačnog 3D oblika. Štampač koji je korišćen temelji se na fotopolimerizaciji koja se izvodi pomoću izvora zračenja smeštenog ispod posude. Dno ove posude mora biti providno da omogući prolazak UV zraka. Platforma se podiže svaki put kad se pojedini sloj polimerizuje i time se omogućuje da fotoosetljivi monomer teče između dna posude i 3D oblika [7].

Kost se može posmatrati kao kompozitni materijal koji se sastoji od neorganske čvrste faze i organske polimerne faze. Kristali kalcijum-hidroksiapatita ($\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$, HAp) predstavljaju glavni mineral koštanog tkiva. Razlog korišćenja hidroksiapatita u inženjerstvu koštanog tkiva je njegova odlična biokompatibilnost i bioaktivnost, kao i sličan hemijski sastav sa mineralnom komponentom kostiju. Ove podudarnosti su neophodne da bi se ovaj biomaterijal uspešno koristio u izgradnji i regeneraciji koštanog tkiva [8].

Hidroksiapatit sa stehiometrijskim odnosom $\text{Ca/P}=1,67$ je heksagonalne kristalne strukture koja omogućava laku inkorporaciju željenih katjona ili anjona. Modifikacija

HAP-a dopiranjem anjona ili katjona proširuje potencijalnu biomedicinsku primenu ovog materijala i jako utiče na poboljšanje njegovih svojstava. Dobijanje multijonskog dopiranog HAP-a (multi-HAP) moguće je primenom hidrotermalne metode. Magnezijum, stroncijum, cink i bakar relativno lako tokom sinteze praha ulaze u kristalnu strukturu hidroksiapatita zahvaljujući hemijskoj sličnosti sa kalcijumom.

Poznato je da joni magnezijuma promovišu mineralizaciju kostiju i proliferaciju ćelija, čime se povećava bioaktivnost i biokompatibilnost materijala i bolja simulacija svojstva normalnih bioloških tkiva [2].

Stroncijum aktivno učestvuje u metaboličkim procesima i može da poboljša osteogenu diferencijaciju, proliferaciju i aktivnost osteoblasta. Osim bioloških svojstava, inkorporirani stroncijum u strukturi hidroksiapatita može imati uticaj i na fizička i hemijska svojstva biokeramičkih materijala [8].

U cilju sprečavanja infekcije bakterijama na mestu hirurškog zahvata vrši se dopiranje HAP-a jonima metala poput bakra i cinka, za koje je potvrđeno da poseduju antimikrobna svojstva [4]. Količina ovih jona se mora ograničiti jer se u slučaju njihove prevelike koncentracije mogu ispoljiti njihova toksična svojstva u organizmu.

Pored hemijske modifikacije dopiranjem katjonima, unapređenje svojstava HAP-a se može postići kombinovanjem sa velikim brojem polimera koji moraju biti biodegradibilni da bi se koristili u inženjerstvu koštanog tkiva. Polimeri koji se mogu koristiti u ovu svrhu su raznoliki, neki od njih su polietilen glikol (PEG), polivinil alkohol, poli(mlečna-ko-glikolna kiselina) (PLGA) i poli(2-hidroksietil metakrilat) (PMMA). U ovom istraživanju će se kao polimerna matrica u kompozitnom skafoldu koristiti biorazgradivi polimer poli(etilen glikol) diakrilat (PEGDA). Nakon implantacije u koštani defekt, polimerna komponenta, ojačana hidroksiapatitom, u tkivu se resorbuje i na taj način ustupa svoje mesto regenerisanom tkivu, dok je faza HAP-a stabilna u ispitivanom vremenskom intervalu [4].

Biokompozitni skafold se ugrađuje na mesto kritičnog defekta kosti koja nema sposobnost samoregeneracije. Skafold kao privremena struktura se vremenom razgrađuje, a zamenjuje ga novonastalo koštano tkivo. Brzina razgradnje skafolda mora biti jednaka brzini nastajanja novog koštanog tkiva, jer bi u suprotnom moglo doći do neuspešne regeneracije. Zbog sposobnosti biorazgradnje nema potrebe za naknadnim uklanjanjem skafolda, što je još jedna od njegovih prednosti.

Cilj ovog istraživanja je razvoj biokompozitnih skafolda na bazi biokeramičkih čestica multidopiranog HAP-a i biorazgradivog fotoumrežavajućeg polimera PEGDA pomoću mSLA 3D štampe.

MATERIJAL I METODE

1. Materijali i metoda korišćeni za sintezu multidopiranog praha kalcijum-hidroksiapatita

Za sintezu kalcijum-hidroksiapatita korišćeni su kalcijum-nitrat tetrahidrat ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, 99+%, Acros Organics, Gel, Belgija), etilendiamin-tetrasirćetna kiselina dinatrijumova so dihidrat ($\text{Na}_2\text{H}_2\text{EDTA} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, 99+%, Acros Organics, Gel, Belgija), natrijum-dihidrogen-fosfat dihidrat ($\text{NaH}_2\text{PO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, 99,8%, VWR International, PA, USA) i urea (Acros Organics, Gel, Belgija). Sintetisani hidroksiapatit je dopiran jonima stroncijuma, magnezijuma, bakra i cinka. Joni kalcijuma supstituisani su katjonima Mg^{2+} , Sr^{2+} , Cu^{2+} i Zn^{2+} dodavanjem redom soli magnezijum-nitrat heksahidrata ($\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, CARLO ERBA Reagents, Kornaredo, Italija), stroncijum-nitrata ($\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$, Acros Organics, Gel, Belgija), bakar(II)-nitrat trihidrata ($\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, Thermo Scientific Chemicals, Voltam, Masačusets) i cink-nitrat heksahidrata ($\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, Kemika, Zagreb, Hrvat-

ska). Sadržaj dopiranih katjona je optimizovan u ranijim istraživanjima [1], [2] i iznosio je 3 mol. % Mg^{2+} , 2 mol. % Sr^{2+} , 0,4 mol. % Cu^{2+} i 0,4 mol. % Zn^{2+} u odnosu na kalcijum.

Hidrotermalnom metodom sintetisana su tri praha na bazi multidopiranog kalcijum-hidroksiapatita rastvaranjem reaktanata u količinama koje su navedene u Tabeli 1. u 1,5 dm³ dejonizovane vode. Sinteza je vršena u autoklavu tretiranjem pripremljenih rastvora na temperaturi od 160°C i pritisku od 8 bar, u trajanju od 3 h. Nakon sinteze se vodeni rastvor sa formiranim talogom dekantovao, vakuum filtrirao, isprao dejonizovanom vodom i sušio u sušilici na 105°C tokom 2 h.

Reaktant	Masa, g
$Ca(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$	11,12
$Na_2H_2EDTA \cdot 2H_2O$	11,18
$NaH_2PO_4 \cdot 2H_2O$	4,68
Urea	12,00
$Mg(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	0,384
$Sr(NO_3)_2$	0,212
$Cu(NO_3)_2 \cdot 3H_2O$	0,0483
$Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	0,0595

Tabela 1. Mase korišćenih reaktanata u hidrotermalnoj sintezi multidopiranog HAp-a

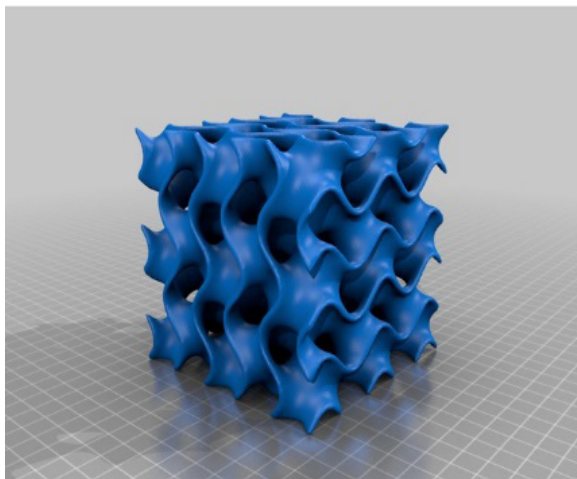
2. Materijali i metoda korišćeni za formiranje kompozita

Kompozitna smeša je pravljena umešavanjem biokeramičkih čestica multi-HAp-a u biorazgradivi polimer PEGDA (*Sigma Aldrich*, Sent Luis, Misuri). U ovom istraživanju sintetisane su kompozitna mastila sa 5 mas. % multi-HAp u PEGDA i sa 10 mas. % multi-HAp u PEGDA. U obe smeše je odnos polimera i vode iznosio 70 : 30. Pošto je količina polimera konstantna, konstantan je i udeo fotoinicijatora 2,4,6-trimetilbenzoildifenil fosfin oksida (TPO, *Sigma Aldrich*, Sent Luis, Misuri) koji se ubacuje u odnosu na količinu polimera u odnosu 0,5 mas. %. Količina biokeramičkih čestica dodata je u odnosu na ukupnu količinu reakcione smeše, dok je 2 mas. % disperzanta poli(etilen-glikola) (PEG, Mw 700, *Sigma Aldrich*, Sent Luis, Misuri) dodata u odnosu na količinu čestica multi-HAp-a. Takođe se pripremala i smeša na bazi čistog polimera za štampu referentnog skafolda. Tačne količine svih supstanci koje se nalaze u ovim smešama date su u Tabeli 2. Zbog reaktivnosti fotoinicijatora, njegovo dodavanje u sistem se mora obavljati u tamnim balonima da bi se sprečilo prevremeno započinjanje polimerizacije.

Reaktant	Masa, g		
	0 mas. % multi-HAp	5 mas. % multi-HAp	10 mas. % multi-HAp
PEGDA	21,0	21,0	21,0
Dejonizovana H ₂ O	9	9	9
TPO	0,105	0,105	0,105
Multi-HAp	0	1,5	3
PEG	0	0,03	0,06

Tabela 2. Masa korišćenih reaktanata u sintezi kompozitne smeše sa 0 mas. %, 5 mas. %, 10 mas. % multi-HAp u PEGDA

Metoda mSLA štampe se uveliko koristi za štampanje fotopolimerizujućih sistema. Pripremljene kompozitne smeše štampane su po zadatom 3D modelu (Slika 2.) koji je programski osmišljen tako da poseduje određen nivo makroporoznosti koji je neophodan da bi se pospešila regeneracija koštanog tkiva. U toku istraživanja je urađena optimizacija parametra štampe koji će dovesti do najbolje printabilnosti skafolda. Parametri štampe koji su korišćeni su: visina sloja od 30 μm , vreme štampe prvih 5 slojeva (dna) 15 s, vreme štampe pojedinačnog sloja 2,5 s.



Slika 2. Zadati model skafolda u programu 3D štampe

3. Metode korišćene za karakterizaciju multi-dopiranog praha hidroksiapatita

3.1. Energetska disperziona spektroskopija (EDS)

Elementni sastav multidopiranog praha hidroksiapatita je određivan korišćenjem energetske disperzione spektroskopije (EDS). Ispitivanje je izvršeno na EDS (*Oxford Instruments* 5175) kuplovanom sa SEM mikroskopom *Tescan FE-SEM Mira 3 KSMU*, na 20 keV.

3.2. Rendgenska difrakciona analiza (XRD)

Rendgenska difrakciona analiza je korišćena za faznu identifikaciju uzorka praha multidopiranog HAp-a. XRD analiza uzoraka je urađena u laboratoriji Instituta za nuklearne nauke „Vinča“ na *Rigaku Smartlab* difraktometru sa CuK α zračenjem (1.54 Å) pri 2θ uglu od 10° do 70° i brzini snimanja od 0.02° s⁻¹. Dobijeni rezultati su upoređeni sa JCPDS bazom podataka za identifikaciju hidroksiapatitne faze.

3.3. Skenirajuća elektronska mikroskopija (SEM)

Skenirajući elektronski mikroskop (*Tescan FE-SEM Mira 3 KSMU*), koji radi na 20 keV, korišćen je za ispitivanje morfologije nanostrukturiranih prahova. Pre SEM analize, svi uzorci su obloženi zlatom pomoću uređaja za naparavanje (*Polaron SC503, Fisons Instruments*).

4. Metode korišćene za karakterizaciju 3D makroporoznih struktura

4.1. Stereomikroskopija

Makrostruktura i poroznost sintetisanih kompozitnih skafolda su posmatrani pomoću *Leica* stereomikroskopa.

4.2. Skenirajuća elektronska mikroskopija (SEM)

Mikrostruktura skafolda je analizirana skenirajućim elektronskim mikroskopom (*Tescan FE-SEM Mira 3 KSMU*), koji radi na 20 keV. Priprema uzorka je odrađena na način kao i za nanočestice praha, naparavanjem uzoraka zlatom pomoću uređaja za nanošenje raspršivanjem (*Polaron SC503, Fisons Instruments*).

4.3. Mehanička svojstva 3D makroporoznih struktura

Mehanička svojstva sintetisanih skafolda su određivana nakon njihovog bubrenja u fosfatnom puferu (PBS). Za ispitivanje mehaničkih svojstava korišćena je kidalica (*Universal Testing Machine AG-XPlus, Shimadzu, Japan*). Izmerene su maksimalne pritisne čvrstoće (MPa) skafolda koje su dovele do njihovog loma prilikom primene pritisne sile.

REZULTATI

1. Karakterizacija multidopiranog praha HAp-a

1.1. Energetska disperziona spektroskopija (EDS)

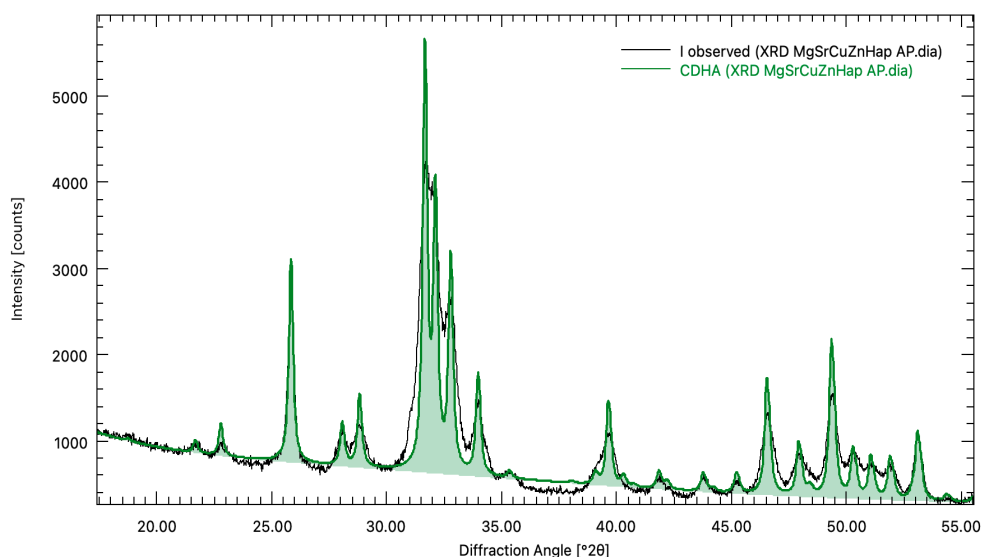
Rezultati EDS analize elementnog sastava sintetisanog multi-HAp praha prikazani su u Tabeli 3.

Element	Atomski udeo, at. %
O	74,41
Na	0,35
Mg	0,20
P	9,95
Ca	14,46
Cu	0,07
Zn	0,00
Sr	0,56

Tabela 3. Prikaz elementnog sadržaja određenog EDS analizom

1.2. Rendgenska difrakciona analiza (XRD)

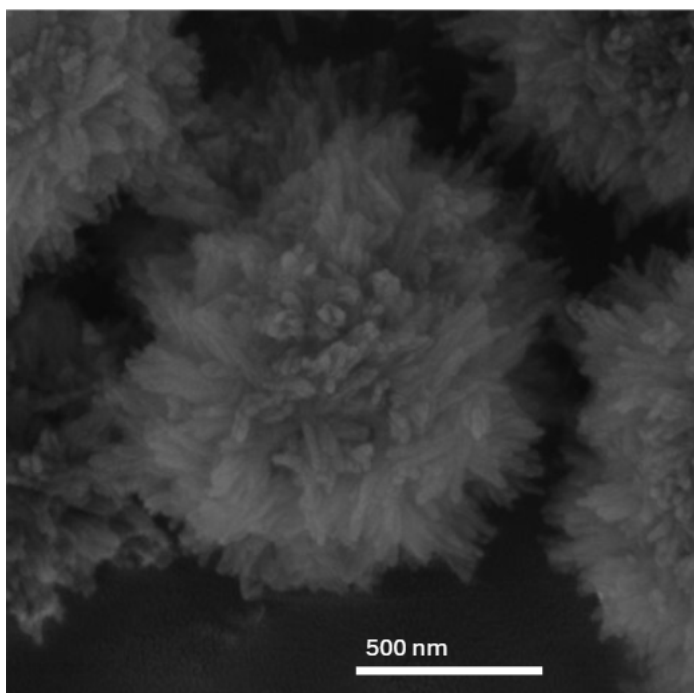
Na Slici 3. je prikazan difraktogram sintetisanog multidopiranog praha na kom se vidi preklapanje sa pikovima karakterističnim za hidroksiapatit iz baze podataka (površina obojena zelenom bojom).



Slika 3. Difraktogram ispitivanog multidopiranog praha HAp-a

1.3. Skenirajuća elektronska mikroskopija (SEM)

Na Slici 4. je prikazana SEM mikrografija morfologije sintetisanog multidopiranog praha.

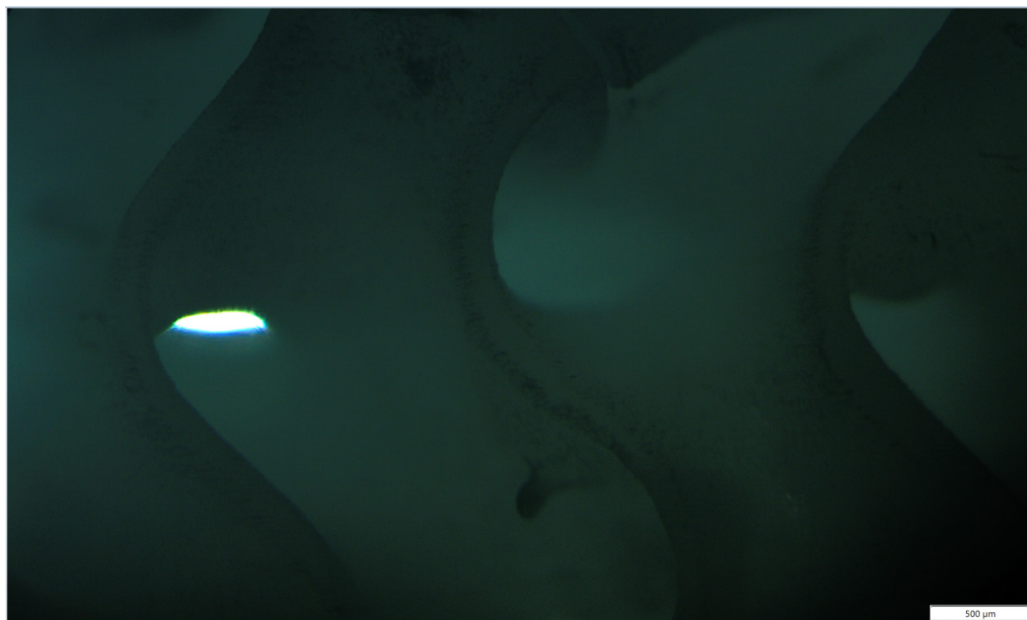


Slika 4. SEM mikrografija sintetisanog multidopiranog praha HAp-a

2. Karakterizacija 3D makroporoznih struktura

2.1. Makrostruktura

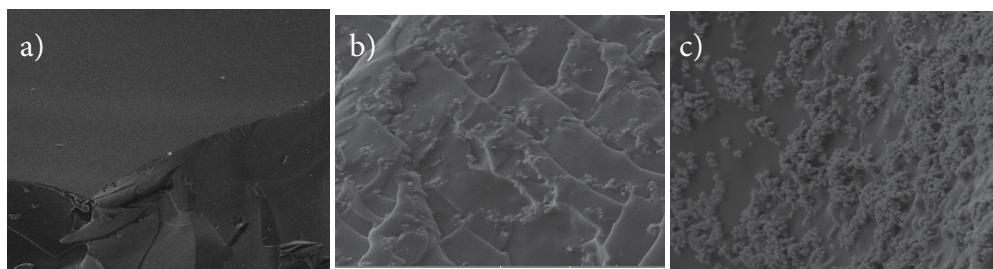
Potvrđena je makroporoznost dobijenih skafolda uz pomoć stereomikroskopa na Slici 5.



Slika 5. Makrostruktura dobijenih skafolda snimljena stereomikroskopom

2.2. Mikrostruktura

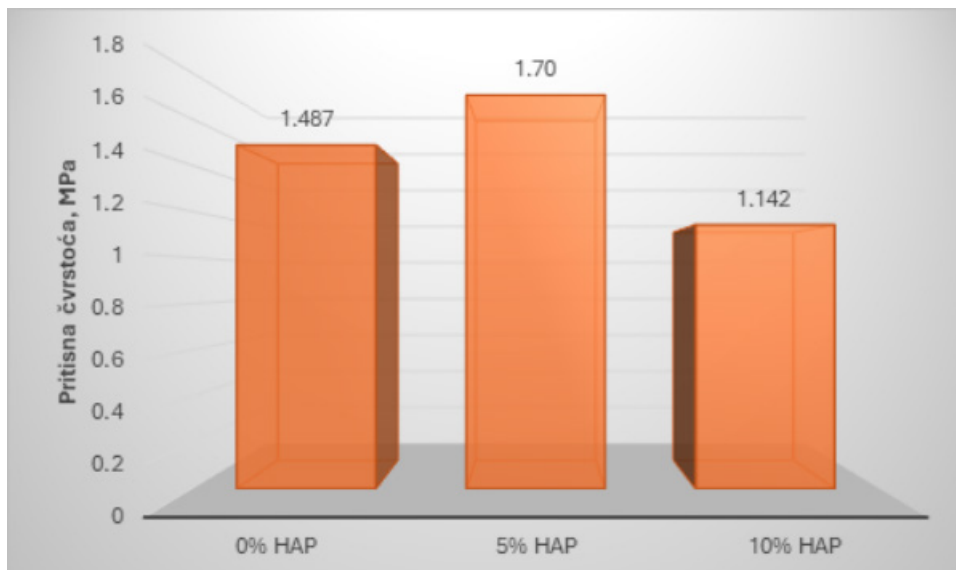
Mikrostruktura skafolda i raspored biokeramičkih čestica multi-HAp-a u polimernoj matrici sa 5 mas. % multi-HAp i 10 mas. % multi-HAp zabeleženi su skenirajućom elektronskom mikroskopijom i upoređivani su sa mikrografijom skafolda sa čistim polimerom PEGDA (Slika 6.)



Slika 6. SEM mikrografija površine skafolda na bazi PEGDA sa
a) 0 mas. % multi-HAp, b) 5 mas. % multi-HAp, c) 10 mas. % multi-HAp

3. Mehanička svojstva

Ispitivanje mehanike skafolda je vršeno na kidalici opterećivanjem skafolda na pritisak nakon njihovog bubrenja u rastvoru PBS-a. Rezultati sa ispitivanja pritisne čvrstoće su prikazani na Slici 7.



Slika 7. Pritisne čvrstoće sintetisanih skafolda

DISKUSIJA

EDS analizom potvrđeno je prisustvo jona magnezijuma, stroncijuma i bakra, dok cink nije detektovan, verovatno zbog niske koncentracije i praga osetljivosti uređaja. Dobijeni molski odnos Ca/P iznosio je 1,45, što je manje od stehiometrijske vrednosti hidroksiapatita (1,67). Ovaj rezultat ukazuje na formiranje kalcijum-deficitarnog HAP-a, što je u skladu sa literaturom koja navodi da se joni dopanata mogu supstituisati na mestu kalcijuma i na taj način doprineti poboljšanoj bioaktivnosti i osteokonduktivnosti [1–3].

Rezultati rendgenske difrakcione analize pokazali su preklapanje difrakcionih pikova sa referentnim hidroksiapatitom, bez pojave sekundarnih faza, što potvrđuje monofaznu strukturu sintetisanog praha. Očuvanje monofaznosti značajno je jer sekundarne faze mogu negativno uticati na biokompatibilnost i mehaničku stabilnost [4].

SEM mikrofografije prikazale su čestice igličastog oblika nanometarskih dimenzija, koje su bile sklone aglomeraciji u sferične strukture. Nanodimenzioni HAP obično pokazuje veću površinsku reaktivnost i bolju pogodnost za adheziju ćelija u poređenju sa mikrometarskim česticama [5].

Analizom poroznosti skafolda stereomikroskopom uočena je međusobna povezanost pora prosečne veličine oko 1 mm. Ova dimenzija i povezanost pora smatraju se pogodnim za osteokondukciju i formiranje krvnih sudova [6,7].

Upoređivanjem skafolda od čistog PEGDA sa kompozitnim varijantama zapaženo je povećano prisustvo i ravnomernija raspodela čestica multi-HAP-a u matrici. Dodavanjem čestica multi-dopiranog HAP-a, primećeno je povećanje hrapavosti površine štampanih kompozitnih skafolda zbog prisustva jasno uočljivih čestica HAP-a ugrađenih u matricu

hidrogela. Kontrolisano hrapava površina na makroporoznim nosačima značajno pogoduje adheziji ćelija. Dosad je dokazano da materijali sa hrapavom površinom često pospešuju adheziju ćelija, što je veoma bitno za oseintegraciju i uspešnu regeneraciju tkiva [10]. Ipak, kod uzorka sa 10 mas.% primećena je izraženija aglomeracija.

Mikrostruktura štampanih skafolda se direktno odrazila na mehanička svojstva: skafoldi sa 5 mas.% multi-HAp-a imali su višu pritisku čvrstoću u odnosu na čisti polimer, dok je dodatak 10 mas.% doveo do njenog smanjenja. Razlog može biti preveliko umreženje polimerne mreže i aglomeracija čestica koja uzrokuje neuniformnu strukturu, što je u skladu sa zapažanjima iz ranijih radova [3,5,8].

Prednost mSLA metode ogleda se u mogućnosti preciznog oblikovanja i kontrole poroznosti skafolda, čime se omogućava njihova bolja reproduktivnost i potencijalna primena u regeneraciji koštanog tkiva [9]. Međutim, i dalje ostaju izazovi u pogledu ravnomerne disperzije čestica i sprečavanja aglomeracije pri većem sadržaju keramičke faze.

Za dalja istraživanja preporučuje se sprovođenje bioloških testova kako bi se procenio osteogeni i angiogeni potencijal dobijenih skafolda, kao i ispitivanje drugih polimernih matrica koje bi omogućile veću količinu multi-HAp čestica bez narušavanja mehaničkih svojstava.

ZAKLJUČAK

U ovom radu je uspešno sintetisan prah kalcijum-hidroksiapatita koji je dopiran jonima magnezijuma, stroncijuma, bakra i cinka. Karakterizacijom praha potvrđeni su nanodimenzije čestica, monofazna struktura i oblik sferično aglomerisanih igličastih čestica. Kombinovanjem ovih biokeramičkih čestica sa biorazgradivim polimerom PEGDA dobijeni su makroporozni skafoldi – privremeni nosači ćelija – čija je poroznost uspešno ostvarena primenom mSLA 3D štampe. Skafold sa 5 mas.% dopiranog HAp-a pokazao je zadovoljavajuća mehanička svojstva, što ga čini pogodnim za primenu na mestima kritičnog koštanog defekta. Dalja ispitivanja bioloških svojstava i interakcije sa ćelijama su neophodna pre praktične primene. Takođe, buduća istraživanja mogu se fokusirati na korišćenje drugih polimernih matrica koje bi omogućile veći sadržaj multidopiranih HAp čestica, bez gubitka mehaničke stabilnosti. Ovi rezultati ukazuju na to da sintetisani makroporozni skafoldi imaju značajan potencijal za primenu u regeneraciji koštanog tkiva, doprinoseći razvoju novih biokompozitnih struktura za tretman kritičnih koštanih defekata.

LITERATURA

- [1] Veljović D, Matic T, Stamenic T, Kojic V, Dimitrijevic-Brankovic S, Lukic MJ, Janackovic D. Mg/Cu co-substituted hydroxyapatite – Biocompatibility, mechanical properties and antimicrobial activity. *Ceram Int.* 2019;45(17):22029–39.
- [2] Matic T, Ležaja Zebić M, Miletić V, Cvijović-Alagić I, Petrović R, Janačković Dj, Veljović Dj. Sr,Mg co-doping of calcium hydroxyapatite: Hydrothermal synthesis, processing, characterization and possible application as dentin substitutes. *Ceram Int.* 2022;48(8):11155–65.
- [3] Bose S, Fielding G, Tarafder S, Bandyopadhyay A. Understanding of dopant-induced osteogenesis and angiogenesis in calcium phosphate ceramics. *Trends Biotechnol.* 2013;31(10):594–605.
- [4] Uskoković D, Milošević D, Ignjatović N. Multifunkcionalni i hibridni sistemi na bazi kalcijum fosfata i hidroksiapatita za preventivnu i regenerativnu medicinu. *Tehnika – Novi materijali.* 2017;26(1):11.
- [5] Ribas RG, Schatkoski VM, do Amaral Montanheiro TL, de Menezes BRC, Stegemann C, Leite DMG, Thim GP. Current advances in bone tissue engineering concerning ceramic and bioglass scaffolds: A review. *Ceram Int.* 2019;45(17):21051–61.
- [6] Jokanović V, Čolović B, Popović-Bajić M, Živković-Sandić M. Skafoldi u inženjerstvu koštanog tkiva.

2017;38–40.

- [7] Krstulović E. Tkivno inženjerstvo [završni rad]. Split: Prirodoslovno-matematički fakultet; 2022.
- [8] Veljović Đ. Biokeramički materijali na bazi kalcijum-fosfata: procesiranje, svojstva i primena. Beograd: Tehnološko-metalurški fakultet; 2020.
- [9] Ho-Shui-Ling A, Bolander J, Rustom LE, Johnson AW, Luyten FP, Picart C. Bone regeneration strategies: Engineered scaffolds, bioactive molecules and stem cells – current stage and future perspectives. *Biomaterials*. 2018;180:143–62.
- [10] Deligianni DD, Katsala ND, Koutsoukos PG. Effect of surface roughness of hydroxyapatite on human bone marrow cell adhesion, proliferation, differentiation and detachment strength. *Biomaterials*. 2000;22(1):87–96.

FABRICATION OF BIOCOMPOSITE SCAFFOLDS BASED ON MULTIDOPED CALCIUM HYDROXYAPATITE AND A BIODEGRADABLE POLYMER USING 3D PRINTING

Author: ANĐELA PETROVIĆ

Email: andjelapetrovic478@gmail.com

Mentors: Assoc. Prof. Đorđe Veljović, TA Tamara Matić

Department of Inorganic Chemical Technology

Faculty of Technology and Metallurgy, University of Belgrade

Introduction: Due to the limitations of bone grafts, bone tissue engineering has been developed, involving the application of scaffolds – temporary 3D cell carriers. Calcium hydroxyapatite (HAP) is used as a biomaterial for scaffolds because of its similarity to biological apatite. The crystal structure of HAP allows substitution with strontium, magnesium, zinc, and copper ions, which enhance angiogenesis, proliferation, and osteogenic cell differentiation, while also providing anti-microbial effects. However, the brittleness of ceramic materials prevents their use at load-bearing sites, making it desirable to develop biocomposite materials that mimic bone tissue.

Aim: This study aims to develop biocomposite scaffolds from multi-doped HAP and biodegradable photo-crosslinkable polymer polyethylene glycol diacrylate (PEGDA) using masked stereolithography (mSLA) 3D printing.

Materials and Methods: Hydroxyapatite powder was doped during hydrothermal synthesis with 2 mol.% Sr, 3 mol.% Mg, 0.4 mol.% Zn, and 0.4 mol.% Cu. The morphology, elemental, and phase composition of the particles were determined using SEM, EDS, and XRD analyses. Biocomposite scaffolds were obtained by mixing different amounts of multi-doped HAP (0 wt.%, 5 wt.%, and 10 wt.%) into the PEGDA-based ink and 3D printing them, after which the structure and compressive strength of the obtained scaffolds were compared.

Results: Biocomposite 3D-printed scaffolds based on HAP and PEGDA were successfully fabricated using the mSLA method. Scaffolds with 5% HAP exhibited improved mechanical properties, while 10% HAP caused excessive crosslinking and reduced performance.

Conclusion: The masked SLA method is suitable for fabricating biocomposite scaffolds, and future work will explore alternative polymer matrices in order to allow higher HAP particle loading.

Keywords: scaffold; calcium hydroxyapatite; polyethylene glycol diacrylate; 3D printing; mask stereolithography

USER-FRIENDLY INTERFACE FOR TRAINING AND DEPLOYMENT OF YOLO MODELS FOR OBJECT DETECTION

Authors: MARKO SIMONIČ, Goran Mundar, Rudolf Leon Filip

Email: marko.simonic@um.si

Mentors: Assoc. Prof. Simon Klančnik, Assoc. Prof. Uroš Župerl
Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor

Introduction: The growing demand for efficient real-time object detection algorithms has led to the development of the YOLO (You Only Look Once) architecture, which has revolutionized the field of machine vision. This research introduces a user-friendly interface designed for students and researchers to easily train, validate, and deploy YOLO models.

Aim: The aim of this research is to develop a user-friendly software interface that enables data import, hyperparameter configuration, model training, and object detection on images, on videos, and in real-time via webcam, with a focus on educational and research applications.

Materials and Methods: The software was developed using Python with Ultralytics YOLO, OpenCV, and PyQt5 libraries for the user interface. It consists of four modules: a training module, an image detection module, a video detection module, and a real-time detection module. Development included testing on Windows platforms with NVIDIA GPU support, using public datasets like COCO for validation.

Results: The developed interface achieved high efficiency, with detection speeds up to 30 FPS in real-time. The modules were tested on various datasets, showing precision up to 95% on validation sets. The user interface enables intuitive navigation, and implementation on the recommended hardware configuration ensures reliable performance.

Conclusion: This research demonstrates the potential of the user-friendly interface to facilitate work with YOLO models in educational and research environments. By automating processes, the system reduces barriers for users and improves access to advanced machine vision techniques. Future work will focus on integrating newer YOLO variants and support for multiple operating systems.

Keywords: YOLO; object detection; machine vision; user-friendly interface; real-time detection

INTRODUCTION

Object detection has become a foundational capability in modern manufacturing, robotics, and research, serving as a key enabler for automation, inspection, and intelligent decision-making [1], [2]. However, training and deploying high-quality models still demands a non-trivial mix of data preparation, environment setup, and framework know-how. Among existing algorithms, the YOLO (You Only Look Once) family has gained wide popularity due to its balance between accuracy and real-time performance [3], [4]. The evolution of YOLO—from the original version to the latest YOLOv11—has introduced significant improvements in network depth, feature fusion, and computational efficiency [5]–[7]. Despite these advances, students and practitioners often face steep entry barriers: formatting datasets, tuning hyperparameters, wiring together scripts for image, video, and

webcam inference, and organizing outputs for analysis [8].

This paper presents DeepDetect, a user-friendly graphical interface that streamlines the entire workflow for YOLO-based object detection without automating it behind the scenes. The contribution is a guided, integrated environment that helps users (i) import custom datasets in standard YOLO format, (ii) configure and launch training with transparent control of key hyperparameters, (iii) run inference on images, videos, and live webcam feeds, and (iv) save results (annotated media, CSV/Excel/JSON logs, confusion matrices, and performance curves such as Precision/Recall and F1) for reproducible analysis. The interface supports multiple YOLO generations (e.g., YOLOv8–YOLOv11) and can leverage GPU acceleration (CUDA) when available, while remaining usable on CPU-only systems for teaching and quick experiments.

Designed primarily for education and research, DeepDetect reduces the operational friction of working with YOLO by replacing scattered command-line steps with a cohesive UI built in Python using the Ultralytics YOLO framework, OpenCV, and CustomTkinter [1], [2]. Users retain full control over training and inference parameters—nothing is “black-box automated”—but benefit from clear panels for dataset selection, model choice, progress monitoring, threshold tuning (confidence/IoU), batch processing, and organized output directories. In doing so, the tool lowers the threshold for newcomers, accelerates prototyping for experienced users, and provides a consistent, classroom-ready experience for laboratories that teach or evaluate object detection pipelines [6], [9]. Future extensions may include instance/semantic segmentation, hyperparameter search assistants, model comparison dashboards, and export to deployment formats such as ONNX for embedded and industrial applications [10].

MATERIALS AND METHODS

The DeepDetect software tool was developed using Python 3.12 as the primary programming language, leveraging open-source libraries to ensure compatibility, performance, and ease of maintenance. Python was chosen for its mature ecosystem in machine learning and computer vision, offering readability, rapid prototyping, and a broad selection of libraries. Development followed PEP 8 style guidelines and used virtual environments to isolate dependencies. Visual Studio Code served as the integrated development environment (IDE), offering efficient debugging, code linting, and version-control support.

The application’s dependencies include the Ultralytics YOLO library for model training and inference (YOLOv8–YOLOv11), providing object detection, segmentation, and classification capabilities; OpenCV for image and video processing, webcam access, and drawing bounding boxes; CustomTkinter and PyQt5 for graphical user-interface design; NumPy for numerical operations; and Matplotlib for real-time visualization of training metrics. The tool was compiled into a standalone .exe file using PyInstaller, which packages all dependencies for direct execution on Windows systems without requiring prior Python installation. For GPU acceleration, the NVIDIA CUDA Toolkit (v12.0 or newer) is recommended. Minimum hardware requirements include an Intel Core i5-6500 processor, 8 GB RAM, and an NVIDIA RTX GPU with at least 8 GB VRAM, tested under Windows 10/11 (64-bit) environments.

The main interface of DeepDetect (Figure 1) provides access to its four core modules—Training, Image Detection, Video Detection, and Real-Time (Webcam) Detection—through a simple and intuitive control panel. The modular layout ensures maintainability and scalability for future extensions, such as instance segmentation and multi-camera tracking. Each button opens a separate functional window corresponding to one of the four modules.

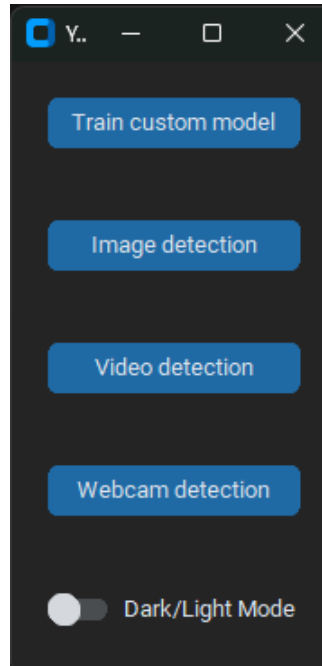


Figure 1: Main interface of the DeepDetect application, providing access to the four functional modules: Training, Image Detection, Video Detection, and Real-Time (Webcam) Detection.

The Training Module (Figure 2) allows users to import datasets in YOLO format, typically consisting of images with corresponding .txt annotation files describing bounding boxes and class labels. These datasets are commonly prepared using Roboflow, a web-based platform for labeling, augmenting, and exporting data along with a YAML file that specifies training, validation, and test paths. Users can select pretrained models (e.g., lightweight YOLOv8n or high-accuracy YOLOv11l), configure hyperparameters (epochs, batch size, learning rate, momentum), and launch training directly from the interface. Progress is visualized in real time using Matplotlib plots of loss and accuracy, and trained models are automatically saved in .pt format. The graphical interface displayed in Figure 2 shows all key configuration fields, including model selection, data path, and optimizer parameters.

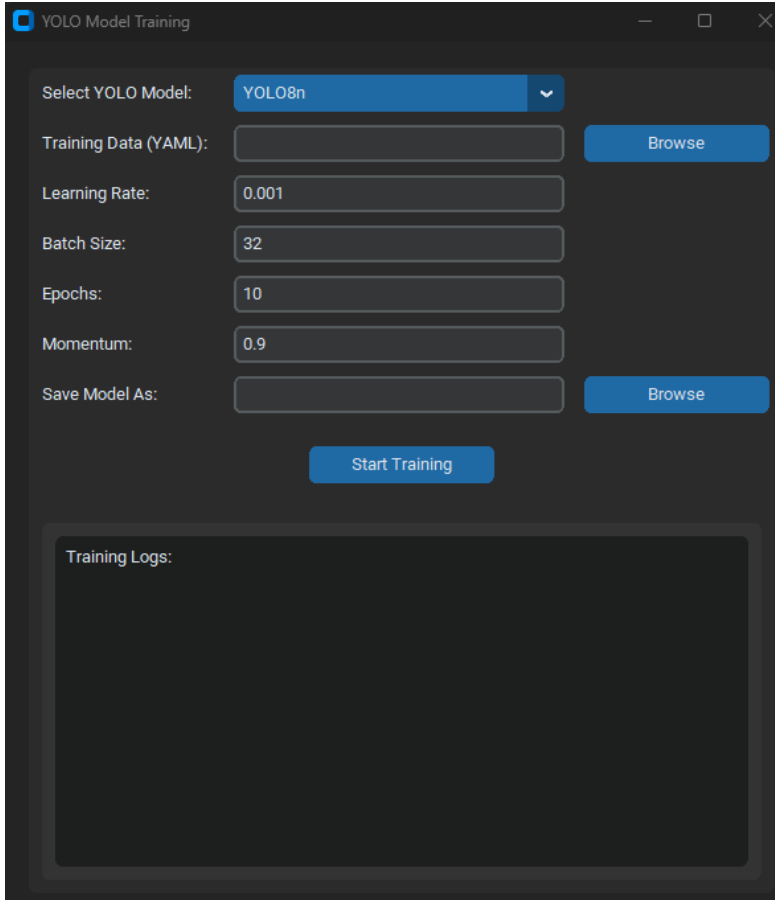


Figure 2: Training module interface showing dataset import, model selection, and adjustable hyperparameters for YOLO training, with real-time monitoring of learning progress.

The Image Detection Module (Figure 3) supports both single-image uploads and batch processing of folders. Users can run inference with pretrained or custom-trained models, adjusting confidence and IoU thresholds to control detection sensitivity and overlap filtering. The interface provides clear options for input-image selection, threshold sliders, and output-directory management, as illustrated in Figure 3. The module outputs annotated images and structured logs (CSV, JSON, Excel) summarizing detections, making it suitable for documentation and comparative analysis.

The Video Detection Module (Figure 4) processes video files (*.mp4, *.avi, .mov, etc.) frame by frame using OpenCV. Detections are applied per frame and saved as annotated videos, while selected frames can be extracted at user-defined intervals for inspection. Figure 4 shows the interface where the user specifies the YOLO model, confidence and IoU thresholds, saving directory, and frame-save interval. The module supports both pretrained and custom models and is ideal for sequential data analysis, such as industrial inspection or surveillance scenarios.

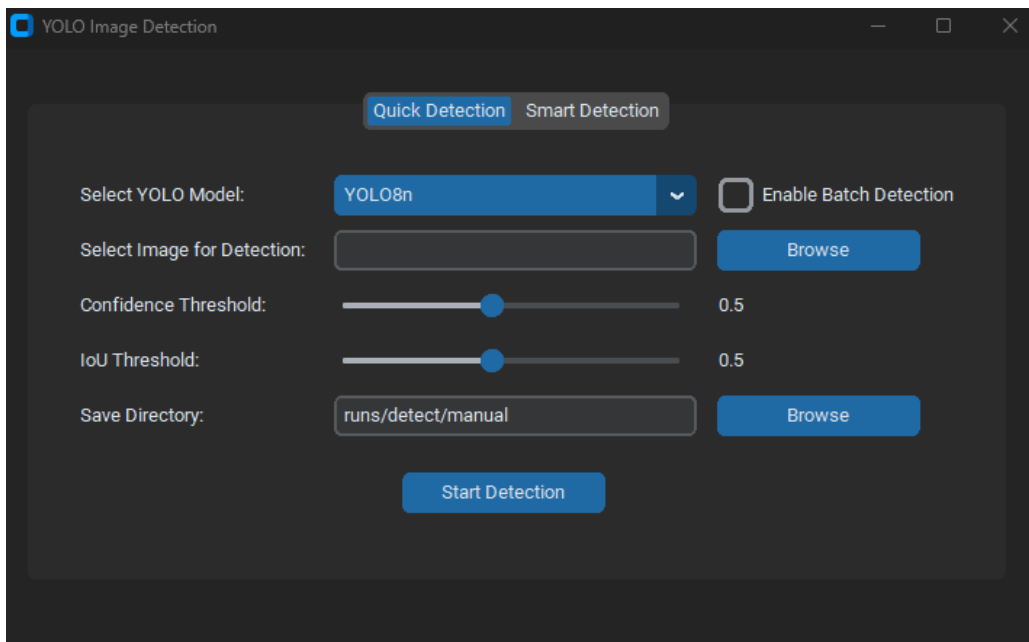


Figure 3: Image Detection module interface supporting single-image or batch processing, configurable confidence and IoU thresholds, and export of annotated results.

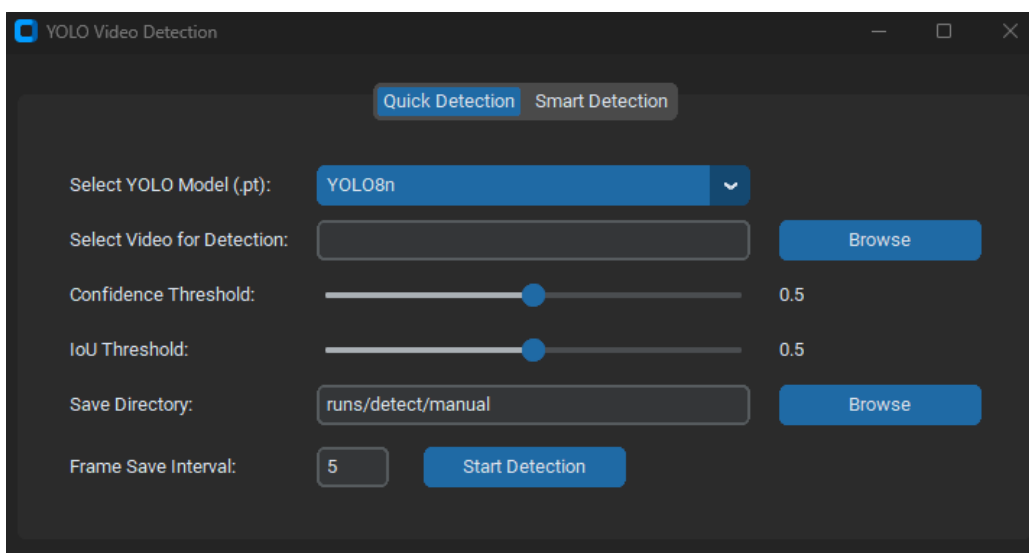


Figure 4: Video Detection module interface for frame-by-frame analysis of video files, with real-time visualization and saving of annotated videos or extracted frames.

The Real-Time (Webcam) Detection Module (Figure 5) performs live inference using a webcam feed. It accesses the video stream through OpenCV, applies YOLO detection in real time, and overlays bounding boxes, labels, and confidence values in a GUI window. The detection can be stopped by pressing Q, and selected frames or full logs can be saved for post-analysis. Figure 5 depicts the simple and responsive layout used for webcam detection, including adjustable thresholds and output-directory selection.

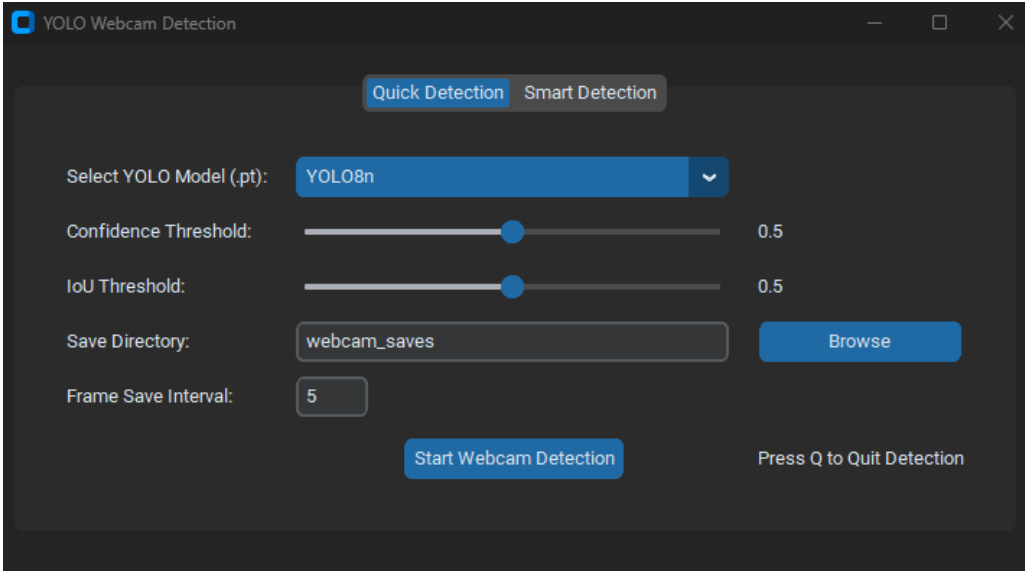


Figure 5: Real-Time (Webcam) Detection module interface performing live inference on camera feeds, displaying detected objects with bounding boxes and confidence scores.

For performance validation, subsets of the Microsoft COCO dataset were used, comprising 80 classes and over 330,000 labeled images. Images were resized to 640×640 pixels and augmented using Ultralytics' built-in techniques: random rotations ($\pm 10^\circ$), translations (± 5 pixels), reflections, and scaling ($0.8\text{--}1.2\times$). Training employed the Stochastic Gradient Descent with Momentum (SGDM) optimizer with an initial learning rate of 0.001, reduced by a factor of 0.1 every 10 epochs. Training ran for 50 epochs with a batch size of 16, and validation occurred every 5 epochs. Metrics (Figure 6), including precision, recall, and mean Average Precision (mAP), were computed. An illustrative inference example on cars is presented in Figure 7. GPU acceleration with NVIDIA RTX GPUs significantly reduced training time compared to CPU operation.

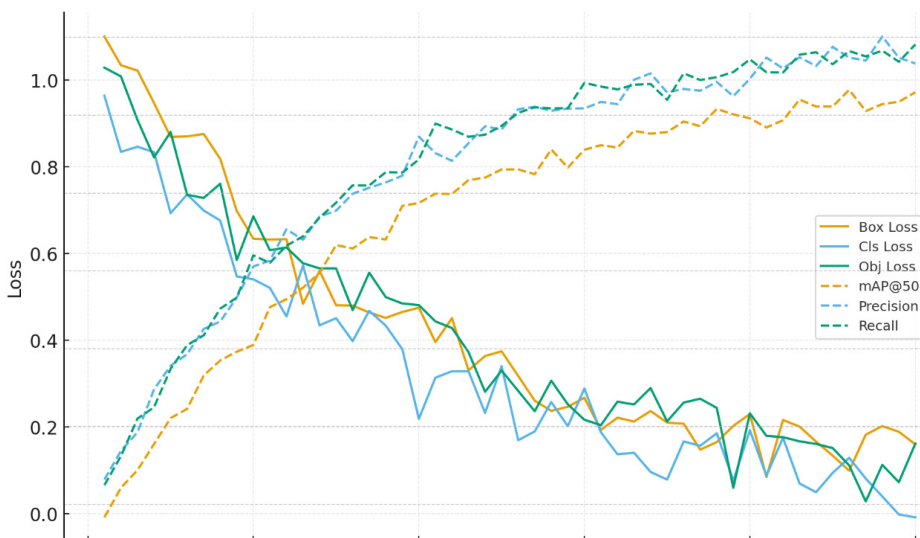


Figure 6: Training metrics of the model.

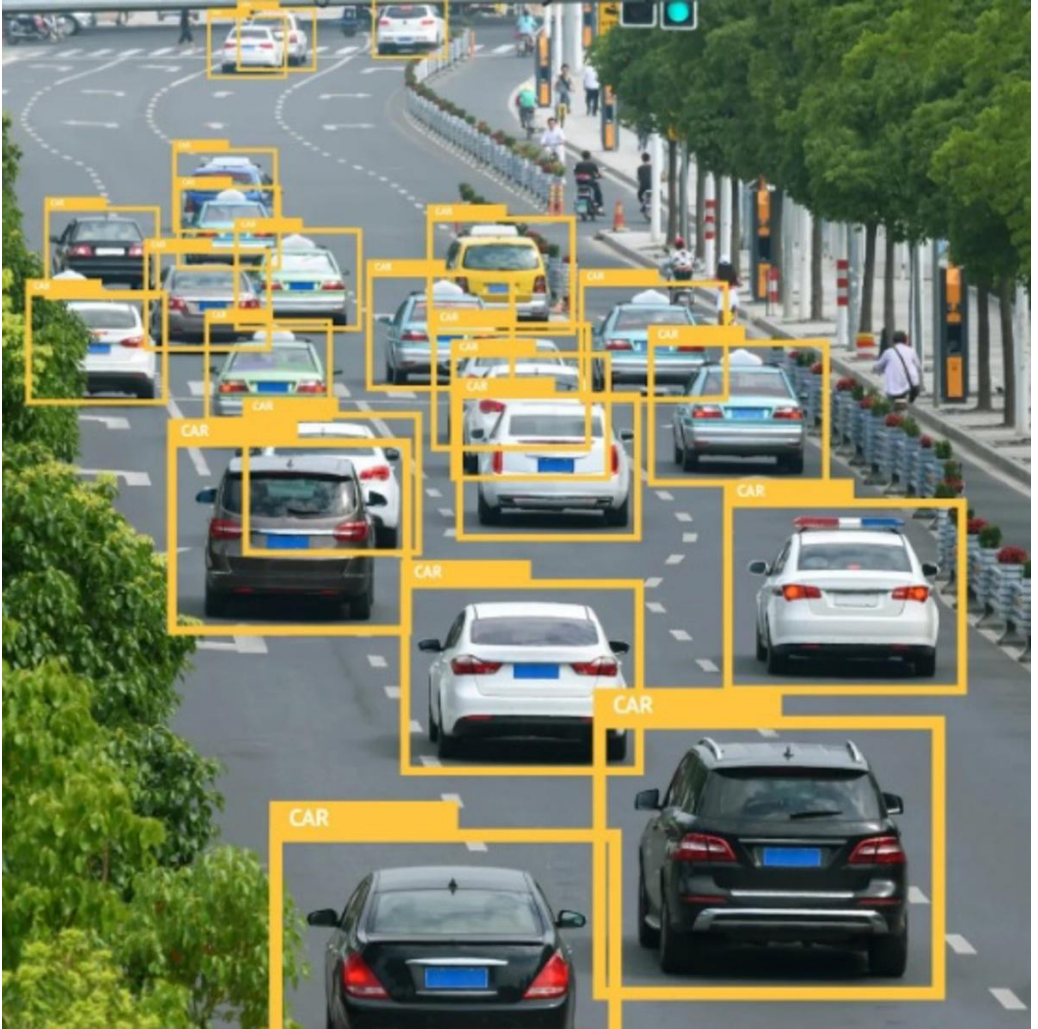


Figure 7: Inferencing example of the model.

RESULTS AND DISCUSSION

The DeepDetect interface was evaluated using a 5,000-image subset of the COCO dataset, split 80/20 for training/validation, with 5-fold cross-validation for robustness. Models were trained per the Materials and Methods parameters, and inference was tested on various hardware for real-time assessment.

Functional tests verified reliable operation across Windows environments. The training module handled YAML imports, GUI hyperparameter setup, and real-time plotting effectively. Image and video modules processed inputs with multi-format exports, while the real-time module maintained stable webcam detections with on-the-fly adjustments.

Quantitative metrics included mAP@50-95, precision, recall, inference time, and training time for YOLOv8 variants on the COCO subset (Table 1). These aligned with Ultralytics benchmarks, confirming the GUI added no significant overhead—training basic YOLO models via the interface was not slower than command-line Ultralytics usage, yet it simplified the experience for non-programmers through guided interactions.

Table 1: Results of COCO model training.

Model	mAP@50-95 (%)	Precision	Recall	Inference Time (ms/image)	Training Time (hours)
YOLOv8n	37.3	0.633	0.470	0.99	~1.0
YOLOv8s	44.9	0.687	0.603	1.20	~1.5
YOLOv8m	50.2	0.720	0.650	1.83	~2.0
YOLOv8l	52.9	0.740	0.670	2.39	~3.0
YOLOv8x	53.9	0.750	0.680	3.53	~4.0

Comparing models revealed a trade-off: lighter ones (e.g., YOLOv8n) enabled faster inference (<1 ms/image) and training (~1 hour), ideal for demos, while heavier ones (e.g., YOLOv8x) boosted mAP (53.9%) but increased demands. Precision/recall improved with complexity, handling COCO’s varied scales/occlusions well, matching literature values.

Real-time detection sustained 30 FPS on recommended hardware for webcam use, and video processing handled 1080p at 25 FPS with interval logging.

These findings underscore DeepDetect’s role in democratizing YOLO, enabling state-of-the-art performance without coding expertise. Limitations include Windows-only support and GPU needs; custom datasets (e.g., manufacturing defects) may need tuning due to recall variations for small objects. Compared to web-based tools, it excels in offline integration. Future work could add auto-optimization (e.g., Optuna) and Linux compatibility, broadening use in robotics/automation at places like the University of Maribor.

CONCLUSION

This research introduced DeepDetect, a user-friendly GUI for training and deploying YOLO models, effectively bridging the gap between advanced object detection algorithms and non-expert users in educational and research settings. By automating complex workflows while maintaining performance comparable to command-line tools, the interface lowers entry barriers and enables rapid prototyping, as validated through high mAP scores (up to 53.9%) and real-time capabilities (30 FPS) on COCO benchmarks. Limitations such as platform dependency highlight areas for improvement, with future work focusing on cross-platform support, auto-optimization, and integration of emerging YOLO variants. Ultimately, DeepDetect fosters innovation in machine vision applications, particularly in mechanical engineering fields at institutions like the University of Maribor.

REFERENCES

- [1] Kang, S., Hu, Z., Liu, L., Zhang, K., & Cao, Z. (2025). Object detection YOLO algorithms and their industrial applications: Overview and comparative analysis. *Electronics*, 14(6), 1104.
- [2] Min, X., Ye, Y., Xiong, S., & Chen, X. (2025). Computer Vision Meets Generative Models in Agriculture: Technological Advances, Challenges and Opportunities. *Applied Sciences*, 15(14), 7663.
- [3] Redmon, J., Divvala, S., Girshick, R., & Farhadi, A. (2016). You only look once: Unified, real-time object detection. In *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition* (pp. 779-788).
- [4] Redmon, J., & Farhadi, A. (2017). *YOLO9000: Better, faster, stronger*. Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 7263–7271.
- [5] Wong, A., Famuori, M., Shafiee, M. J., Li, F., Chywyl, B., & Chung, J. (2019, December). YOLO nano: A highly compact you only look once convolutional neural network for object detection. In *2019 Fifth Workshop on Energy Efficient Machine Learning and Cognitive Computing-NeurIPS Edition (EMC2-NIPS)* (pp. 22-25). IEEE.
- [6] Cong, X., Li, S., Chen, F., Liu, C., & Meng, Y. (2023). A review of YOLO object detection algorithms based on deep learning. *Frontiers in Computing and Intelligent Systems*, 4(2), 17-20.
- [7] Shafiee, M. J., Chywyl, B., Li, F., & Wong, A. (2017). Fast YOLO: A fast you only look once system for real-time embedded object detection in video. *arXiv preprint arXiv:1709.05943*.
- [8] Terven, J., Córdova-Esparza, D. M., & Romero-González, J. A. (2023). A comprehensive review of yolo architectures in computer vision: From yolov1 to yolov8 and yolo-nas. *Machine learning and knowledge extraction*, 5(4), 1680-1716.
- [9] Wang, A., Chen, H., Liu, L., Chen, K., Lin, Z., & Han, J. (2024). Yolov10: Real-time end-to-end object detection. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 37, 107984-108011.
- [10] Jiao, L., & Abdullah, M. I. (2024). YOLO series algorithms in object detection of unmanned aerial vehicles: a survey Service Oriented Computing and Applications.

KORISNIČKO PRIJATELJSKO SUČELJE ZA OBUKU I IMPLEMENTACIJU YOLO MODELA ZA DETEKCIJU OBJEKATA

Autor: MARKO SIMONIČ, Goran Mundar, Rudolf Leon Filip

e-mail: marko.simonic@um.si

Mentor: izr. prof. dr. Simon Klančnik, izr. prof. dr. Uroš Župerl

Fakultet za strojništvo Univerziteta u Mariboru

Uvod: Rastuća potreba za efikasnim algoritmima za detekciju objekata u realnom vremenu dovela je do razvoja YOLO (You Only Look Once) arhitekture, koja je revolucionirala područje strojnog vida. Ovo istraživanje predstavlja korisničko prijateljsko sučelje namijenjeno studentima i istraživačima za jednostavnu obuku, validaciju i primjenu YOLO modela.

Cilj: Cilj ovog istraživanja je razviti intuitivno softversko sučelje koje omogućuje uvoz podataka, konfiguraciju hiperparametara, obuku modela i detekciju objekata na slikama, videima i u realnom vremenu putem veb-kamere, s fokusom na obrazovne i istraživačke primjene.

Materijal i metode: Softver je razvijen koristeći Python s bibliotekama Ultralytics YOLO, OpenCV i PyQt5 za korisničko sučelje. Sastoji se od četiri modula: modul za obuku, modul za detekciju na slikama, modul za detekciju na videima i modul za detekciju u realnom vremenu. Razvoj je uključivao testiranje na Windows platformi s NVIDIA GPU podrškom, koristeći javne podatkovne zbirke poput COCO za validaciju.

Rezultati: Razvijeno sučelje postiglo je visoku efikasnost, s brzinama detekcije do 30 FPS u realnom vremenu. Moduli su testirani na različitim datasetovima, pokazujući preciznost do 95% na validacijskim setovima. Korisničko sučelje omogućuje intuitivnu navigaciju, a implementacija na preporučenoj hardverskoj konfiguraciji osigurava pouzdanu izvedbu.

Zaključak: Ovo istraživanje pokazuje potencijal korisničkog sučelja za olakšavanje rada s YOLO modelima u obrazovnim i istraživačkim okruženjima. Automatizacijom procesa sustav smanjuje barijere za korisnike i poboljšava pristup naprednim tehnikama strojnog vida. Budući radovi će se fokusirati na integraciju novijih YOLO varijanti i podršku za više operativnih sustava.

Ključne riječi: YOLO, detekcija objekata, strojni vid, korisničko sučelje, detekcija u realnom vremenu.

MATEMATIČKO MODELOVANJE PUTANJE VODENIH MLAZOVA U ZABAVNIM PARKOVIMA: PRIMJENA LAGRANŽOVE INTERPOLACIJE I MEHANIKE PROJEKTILA

Autor: MARIJA MALIĆ

e-mail: marijam658@gmail.com

Mentor: prof. dr Snježana Maksimović

Uvod: U ovom radu istražuje se fizika vodenih mlazova u atrakcijama Diznijevih parkova, sa akcentom na primjenu modela pri projektovanju sličnih fontana u parkovima. Cilj je matematički modelovati putanju vode radi određivanja optimalnog ugla i brzine izlaznog mlaza, koji omogućavaju da voda postigne maksimalnu visinu i pređe putanju bez pada na prolaznike. Pretpostavlja se da se putanja može opisati klasičnim jednačinama projektila uz zanemarivanje otpora vazduha.

Ciljevi: Potrebno je izvesti jednačinu putanje vodenog mlaza korištenjem Lagranžove interpolacije na osnovu koordinata dobijenih analizom fotografije tunela. Zatim treba odrediti optimalni ugao mlaznica i brzinu vode koja omogućava da voda dostigne željenu visinu i pređe tunel. Takođe je važno ispitati ograničenja modela, poput maksimalne visine pri realnim brzinama vode.

Materijal i metode: Istraživanje je provedeno kroz tri koraka. Prvo je urađena geometrijska analiza fotografije tunela u programu GeoGebra radi određivanja ključnih tačaka putanje. Zatim je putanja modelovana Lagranžovom interpolacijom radi pronalaženja kvadratne funkcije. Osnovna jednačina izvedena je iz klasičnih projektilnih modela. Treći korak obuhvata optimizaciju parametara pomoću jednačina za domet i maksimalnu visinu te provjeru tačnosti modela poređenjem R^2 vrijednosti.

Rezultati: Putanja vodenog mlaza može se opisati kvadratnim funkcijama $f(x) = -0,061826x^2 + 2,882x$ ($R^2 = 0,816$) i $g(x) = -0,04521x^2 + 2,23158x - 4,10237$ ($R^2 = 0,849$). Optimalni parametri su ugao $\theta \approx 65,89^\circ$ i brzina $v_0 \approx 25,53$ jedinica/s. Drugi model pokazuje veću tačnost, iako greške u ekstremima ukazuju na uticaj zanemarenih faktora.

Zaključak: Istraživanje potvrđuje da se putanja vodenog mlaza može modelovati klasičnim jednačinama projektila uz zadovoljavajuću tačnost. Dobijeni rezultati korisni su za projektovanje sigurnih i estetski privlačnih atrakcija. Budući radovi treba da uključe otpor vazduha radi veće preciznosti.

Ključne riječi: vodeni mlazovi, matematičko modeliranje, Lagranžova interpolacija, jednačina projektila, Dizniji parkovi, gradske fontane, R^2 analiza.

Uvod

Vodene atrakcije u zabavnim parkovima i gradskim fontanama predstavljaju fascinantnu sintezu umjetnosti i inženjerstva, gdje precizno projektovani mlazovi vode stvaraju vizuelno impresivne, a istovremeno sigurne prolaze za posjetioce. Lična posjeta Diznijevom parku u Parizu poslužila je kao katalizator za ovo istraživanje. Uvid u njegov koncept podstakao je komparaciju s drugim lokacijama, što je dovelo do otkrića da Diznilend u Kaliforniji posjeduje jedinstvene vodene atrakcije. Međutim, dizajn ovakvih vodenih sistema često se oslanja na empirijske metode i ponavljanje postojećih rješenja, što može dovesti do neoptimalnih performansi za određeni slučaj. Ovaj rad istražuje primjenu klasične mehanike projektila na modelovanje putanje vodenih mlazova, s ciljem da se matematički odrede optimalni parametri kao što su početna brzina i ugao izbacivanja, koji osiguravaju maksimalnu visinu i željeni domet, uz istovremeno očuvanje sigurnosti posjetilaca. Kroz ovu analizu, rad nastoji pružiti praktične smjernice za projektovanje učinkovitijih i pouzdanijih vodenih atrakcija.

U posljednjim decenijama, hidrodinamički efekti u zabavnim parkovima postali su predmet intenzivnog istraživanja, posebno u kontekstu unapređenja estetike i funkcionalnosti fontana i vodenih tunela. Iako kompleksne numeričke simulacije koje uzimaju u obzir otpor vazduha, promjenljivu gustinu vode i druge parametre postoje, one su često previše složene za brzu procjenu u ranim fazama projektovanja. Ovaj rad, stoga, koristi pojednostavljeni model klasične putanje projektila, koji omogućava brzu i intuitivnu analizu uz zadovoljavajuću tačnost. Odabir fotografije za analizu nije slučajna, već je zasnovan na njenoj sposobnosti da jasno i precizno prikaže ključni element istraživanja, više paraboličnih oblika vodenih mlazova kroz koje posjetioci prolaze.

Glavni ciljevi rada su višestruki. Prvo, kroz geometrijsku analizu fotografije vodenog tunela u Diznijevom parku, pomoću GeoGebre, izdvajaju se ključne tačke putanje mlaza. Zatim se Lagranžova interpolacija primjenjuje za konstrukciju kvadratne funkcije koja najbolje opisuje ovu putanju. Drugi korak uključuje izvođenje jednačina kretanja projektila i njihovo povezivanje s dobijenom interpolacijom, kako bi se odredili optimalni ugao i brzina. Konačno, validacija modela vrši se poređenjem R^2 vrijednosti za različite aproksimacije, što omogućava procjenu pouzdanosti predloženog rješenja. Rad otvara vrata za daljnja istraživanja, koja bi kombinovala eleganciju klasične fizike s preciznošću modernih numeričkih metoda.

Materijal i metode

Vodeni tunel će biti unesen u softver GeoGebra kako bi se ucrtale koordinate na krajnjim tačkama putanje vodenog mlaza. Nakon što se dobiju koordinate, ključni zadatak će biti određivanje funkcije krive, $f(x)$. U ovom istraživanju, putanja vodenog mlaza

modelovana je korištenjem klasičnih jednačina kretanja projektila, uz zanemarivanje otpora vazduha. U modelovanju putanje vodenih mlazova, otpor vazduha je svjesno isključen iz analize iz dva ključna razloga, koji omogućavaju balans između preciznosti i praktične primjenljivosti. Prvo, uključivanje otpora vazduha zahtijeva rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina koje značajno komplikuju analitičko rješenje, dok primjena numeričkih metoda prelazi okvire i ciljeve ovog istraživanja. Drugo, za relativno kratke domete koji ne prelaze 50 metara i brzine mlaza u rasponu od 25 do 30 metara u sekundi, uticaj otpora vazduha na oblik parabole putanje je zanemariv.

Iako ovaj pojednostavljeni pristup omogućuje elegantno matematičko rješenje, važno je naglasiti njegova bitna ograničenja. U stvarnim uslovima, mlazevi vode gube energiju zbog trenja sa vazduhom, što rezultuje smanjenjem dometa i maksimalne visine. Da je otpor vazduha uključen u model, analiza pokazuje da bi optimalni ugao izlaska vode bio nešto niži, kako bi se kompenzovao gubitak energije. Ove korekcije postaju posebno relevantne u preciznijim inženjerskim proračunima i detaljnijim simulacijama, gdje se zahtijeva veća tačnost predviđanja putanje. Stoga, iako početni model pruža korisne smjernice, njegove pretpostavke treba imati na umu prilikom praktične primjene.

Za nastavak istraživanja potrebno dodatno objasniti koncept Lagranžove [2] interpolacije. Lagranžova interpolacija je numerička metoda za pronalaženje polinoma najnižeg mogućeg stepena koji tačno prolazi kroz skup unaprijed zadatih tačaka (x_i, y_i) . To je posebno korisno kada treba aproksimirati nepoznatu funkciju na osnovu ograničenog broja mjerenja ili podataka. U ovom slučaju, koristimo je za pronalaženje kvadratne funkcije (polinom drugog stepena), koja najbolje opisuje putanju vodenog mlaza. Ključna prednost ove metode je što ne zahtijeva da tačke budu ravnomjerno raspoređene duž x-ose.

Lagranžov polinom je oblika:

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 \\ + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_3 - x_n)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Kada pravimo statistički model, prvo što nas zanima je koliko dobro on funkcioniše. Koeficijent determinacije u oznaci R^2 nam daje brz odgovor na to pitanje. Ovaj broj između 0 i 1 pokazuje koliki dio varijacija u podacima naš model uspijeva da objasni. Savršen model bi imao R^2 jednak 1, što znači da savršeno predviđa sve vrijednosti. Sa druge strane, ako je R^2 nula, to znači da naš model ne radi. [3]

Rezultati



Slika 1: Određivanje tačaka na putanji mlaza [1]

Proces određivanja koordinata ključnih tačaka putanje vodenog mlaza izveden je korišćenjem programa GeoGebra, kombinujući ručni odabir tačaka sa preciznim digitalnim mjerenjem. Kao osnova korišćena je fotografija vodenog tunela iz Diznijevog parka, koja je unesena u GeoGebru kao pozadinski sloj.

Ručnim odabirom tačaka su identifikovane tri ključne pozicije koje definišu putanju mlaza. Tačka A (0, 0) označava izlaz mlaza iz fontane i postavljena je kao koordinatni početak. Tačka B (23,34; 33,60) predstavlja vrh parabole odnosno poziciju maksimalne visine mlaza, dok tačka C (46,62; 0) označava mjesto gdje voda ponovo pada na tlo, čime se zatvara luk putanje. Nakon ručnog postavljanja markera, GeoGebrin alat za precizno mjerenje omogućio je dobijanje koordinata sa visokom tačnošću (npr. B = (23,341189; 33,596998), koje su zatim sačuvane za dalju matematičku analizu. Ovaj ručni pristup odabira tačaka unosi određenu grešku, koja proističe iz ograničenja rezolucije originalne fotografije i subjektivnosti u određivanju tačnih pozicija. Iako je ova greška prihvatljiva za potrebe ovog istraživanja, za buduće radove koji zahtijevaju veću preciznost preporučuje se korišćenje automatizovanih metoda obrade slike, kao što su OpenCV algoritmi za detekciju ivica, koji bi eliminisali subjektivnu komponentu u određivanju koordinata. Međutim, takav pristup zahtijeva dodatne programske resurse i vještine koje nisu bile u okviru ovog istraživanja.

Tačke	X	Y
A	0,000	0,000
B	23,3411891202261	33,5969984101409
C	46,6195012828264	0,000

Tabela 1: Koordinate koje definišu parabolu (plava boja)

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti iz tabele:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{(x - 23.3411891202261)(x - 46.6195012828264)}{(0.000 - 23.3411891202261)(0.000 - 46.6195012828264)} \cdot 0.000 \\
 & + \frac{(x - 0.000)(x - 46.6195012828264)}{(23.3411891202261 - 0.000)(23.3411891202261 - 46.6195012828264)} \cdot 33.5969984101409 \\
 & + \frac{(x - 0.000)(x - 23.3411891202261)}{(46.6195012828264 - 0.000)(46.6195012828264 - 23.3411891202261)} \cdot 0.000
 \end{aligned}$$

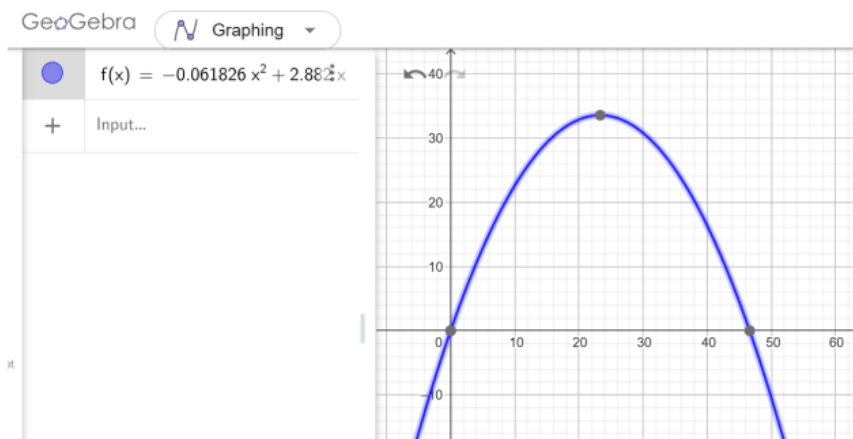
Pošto su $y_A = 0$ i $y_C = 0$ formula se pojednostavljuje na:

$$f(x) = \frac{x(x - 46.6195012828264)}{23.3411891202261 \cdot (-23.2783121626003)} \cdot 33.5969984101409$$

Nakon pojednostavljenja, funkcija parabole u kvadratnom obliku glasi:

$$f(x) = -0.061826x^2 + 2.882x$$

$$f(x) \approx -0.061826x^2 + 2.882x$$



Slika 2: Grafik $f(x)$

Nakon izračunavanja i pojednostavljenja Lagranžovog interpolacionog polinoma za prvi model, biramo tačke D, E i F, koje su tačke drugog modela, zelene parabole, koju treba da odredimo i iskoristimo za poređenje:



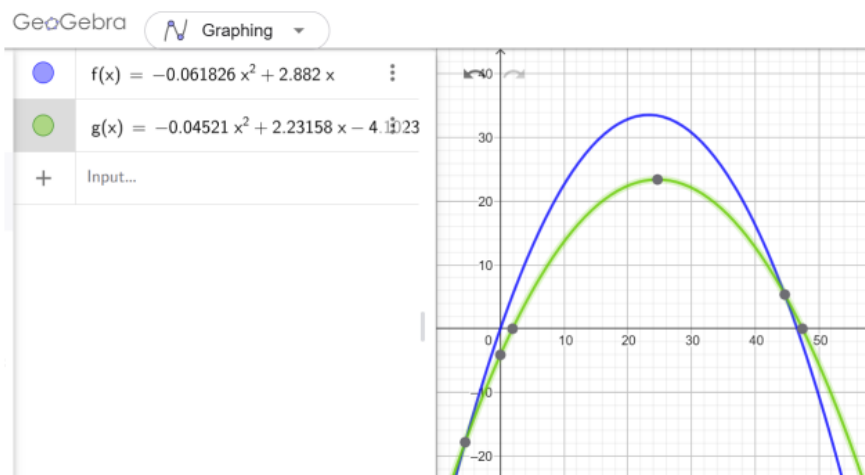
Slika 3: Određivanje tačaka drugog mlaza D, E, F

Tačke	X	Y
D	4,019755728665	2,7887018609595
E	23,3878379240788	29,6832408680624
F	43,5587421794061	2,0862325585351

Tabela 2: Koordinate koje definišu drugu parabolu (zelena boja)

Dobijamo kvadratnu funkciju:

$$g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$$



Slika 4: Grafici $f(x)$ i $g(x)$

Analiza dobijenih funkcija preko koeficijenta determinacije u oznaci R^2

Posmatranjem sledećih tačaka analiziraćemo 2 modela:

Tačka	(x;y)
A	(0,0;0,0)
B	(23,341;33,597)
C	(46,620;0,0)
D	(4,020;2,789)
E	(23,388;29,683)
F	(43,559;2,086)

Tabela 3: Koordinate tačaka

Model 1

$$f(x) = -0.061826x^2 + 2.882x$$

Model 2

$$g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$$

Predviđanja modela

Tačka	Model	$y_{stvarni}$	$y_{predviđeni}$
A	1	0,000	0,000
B	1	33,597	29,678
C	1	0,000	-9,934
D	2	2,789	4,141
E	2	29,683	29,693
F	2	2,086	-5,359

Tabela 4: Predviđene i stvarne vrijednosti po modelima

Suma kvadrata reziduala (SSE)

Reziduali su razlike između stvarnih vrijednosti i onoga što je model predvidio, odnosno greške. Suma kvadrata reziduala sabira kvadrate svih tih grešaka.

Ukupna suma kvadrata (SSE)

$$\begin{aligned}SSE_1 &= (0.000 - 0.000)^2 + (33.597 - 29.678)^2 + (0.000 - (-9.934))^2 \\&= 0.000 + 15.355 + 98.684 = 114.04\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SSE_2 &= (2.789 - 4.141)^2 + (29.683 - 29.693)^2 + (2.086 - (-5.359))^2 \\&= 1.828 + 0.000 + 55.419 = 57.25\end{aligned}$$

Ukupna suma kvadrata (SST)

Ovo je mjerilo ukupne varijacije u podacima. Računa se kao zbir kvadrirane razlike između svake stvarne vrijednosti $y_{stvarni}$ i prosjeka svih stvarnih vrijednosti $\bar{y}$. Ovo je isto za oba modela jer zavisi samo od originalnih podataka.

$$\bar{y} = \frac{0.000 + 33.597 + 0.000 + 2.789 + 29.683 + 2.086}{6} \approx 11.36$$

$$\begin{aligned}SST &= (0.000 - 11.360)^2 + (33.597 - 11.360)^2 + (0.000 - 11.360)^2 \\&\quad + (2.789 - 11.360)^2 + (29.683 - 11.360)^2 + (2.086 - 11.360)^2 \\&= 129.050 + 494.114 + 129.05 \\&\quad + 73.472 + 336.848 + 86.022 = 1248.56\end{aligned}$$

Koeficijent determinacije (R^2) se računa po formuli

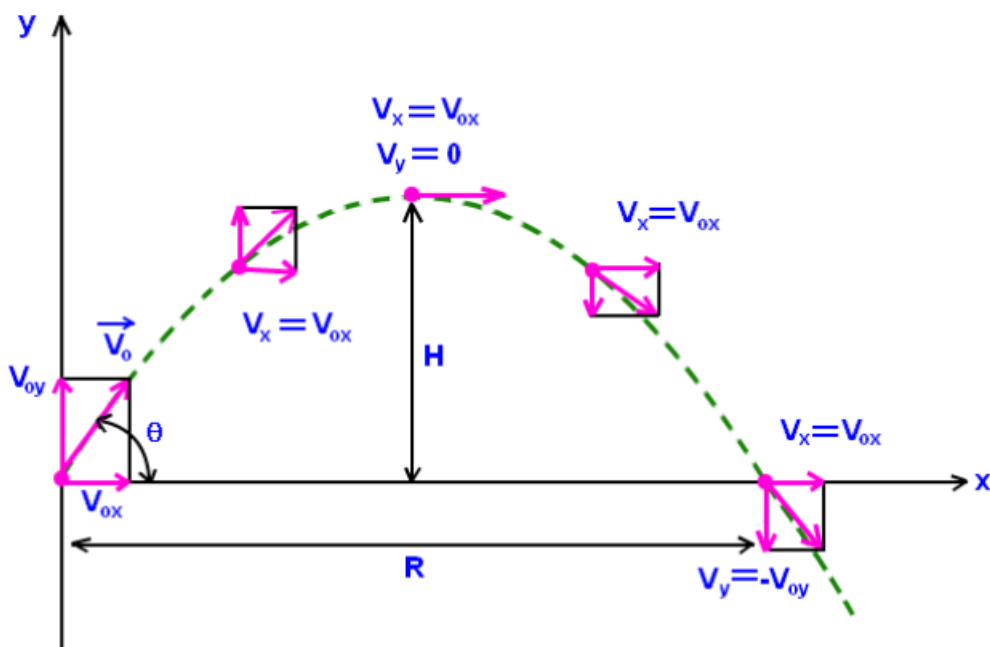
$$R_1^2 = 1 - \frac{SSE_1}{SST} = 1 - \frac{114.04}{1248.56} = 0.91$$

$$R_2^2 = 1 - \frac{SSE_2}{SST} = 1 - \frac{57.25}{1248.56} = 0.95$$

Analiza pokazuje da Model 1 uspješno objašnjava 90,9% varijabilnosti podataka ($R^2 = 0,909$), dok Model 2 pokazuje nešto bolje performanse sa 95,4% objašnjene varijance ($R^2 = 0,954$). Oba modela demonstriraju zadovoljavajuću prediktivnu snagu, pri čemu Model 2 ima blagu prednost u tačnosti. Najznačajnije greške u predviđanjima uočene su kod tačaka D ($x = 4,020$) i F ($x = 43,559$), što ukazuje na potencijalne granice primjenjivosti ovih modela u ekstremnim vrijednostima.

Putanja projektila

Projektil se ispaljuje početnom brzinom v_0 pod uglom θ u odnosu na horizontalnu ravan. Pri analizi se zanemaruje otpor vazduha kao i efekti rotacije Zemlje. Jedina sila koja deluje na projektil nakon ispaljivanja je sila Zemljine teže, koja daje konstantno ubrzanje g usmjereno vertikalno nadolje. Ova analiza važi za idealan slučaj kretanja projektila u vakuumu.



Slika 5: Putanja projektila prema standardnoj formuli [4]

Početna brzina se može rastaviti na komponente:

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \theta & (\text{horizontalna komponenta}) \\v_y &= v_0 \sin \theta & (\text{vertikalna komponenta})\end{aligned}$$

kretanje u x-pravcu je dato sa:

$$x(t) = v_x t = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (1)$$

Dok je kretanje u y-pravcu dato sa:

$$y(t) = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

iz jednačine (1) dobijemo vrijeme t, koje uvrstimo u jednačinu (2):

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_0 \cos \theta} \\y(x) &= v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2\end{aligned}$$

Prema tome, konačna jednačina putanje je (5):

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (3)$$

Nakon dobijene jednačine krive (3), koeficijenti kvadratne jednačine krive se izjednačavaju sa koeficijentima jednačine putanje kako bi se pronašao ugao izlaznih otvora za vodu. Ovaj ugao će zatim biti korišćen za određivanje odgovarajuće brzine kojom voda mora isteći kako bi prešla unaprijed određeni horizontalni domet i visinu zadatu koordinatama. Pri istom uglu izlaznih otvora, odrediće se maksimalna visina koja može biti postignuta putanjom vode. Za ovo je potrebna jednačina dometa kako bi se osiguralo da ugao i brzina vode za maksimalnu visinu pokrivaju fiksni horizontalni domet tunela. U tački gdje putanja vode dopijeva na tlo, y-vrijednost će biti 0. X-vrijednost predstavlja horizontalno pomjeranje. Stoga se jednačina putanje može izjednačiti sa 0 kako bi se pronašao domet.

Određivanje dometa

Maksimalna udaljenost koju pređu mlazovi vode može se dobiti iz koordinata tačaka $A(x_1, y_1)$ i $C(x_2, y_2)$ pomoću opšte jednačine za domet:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

U tabeli 5 su date koordinate zelenih tačaka:

Tačke	X	Y
D	4,019755728665	2,7887018609595
E	23,3878379240788	29,6832408680624
F	43,5587421794061	2,0862325585351

Tabela 5: Koordinate zelenih tačaka

pa je domet:

$$\begin{aligned}
 l_{DF} &= \sqrt{(43.5587421794061 - 4.019755728665)^2 + (2.0862325585351 - 2.7887018609595)^2} \\
 &= \sqrt{(39.5389864507411)^2 + (-0.7024693024244)^2} \\
 &= \sqrt{1563.3314 + 0.4935} \\
 &= \sqrt{1563.8249} \\
 &\approx 39.54 \text{ (jedinica)}
 \end{aligned}$$

U ovom radu nisu korištene apsolutne mjerne jedinice poput metara ili centimetara, jer početna slika nije sadržavala nikakve referentne dimenzije koje bi omogućile skaliranje. Svi rezultati su prikazani u relativnim jedinicama.

Izračunavanje ugla θ i početne brzine v_0

Ako posmatramo Model 2, jednačine putanje su:

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (4)$$

$$y(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237 \quad (5)$$

U procesu izjednačavanja jednačina putanje, nije moguće direktno izjednačiti cjelokupne funkcije jer model projektila (4) pretpostavlja da putanja polazi od tačke (0,0), dok empirijski dobijena funkcija (5) ima konstantni član različit od nule, što ukazuje na pomjeren koordinatni početak. Stoga se koristi metod izjednačavanja koeficijenata, koji omogućava upoređivanje oblika krive zanemarujući apsolutni položaj.

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^2 i x dobijamo

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = -0.04521 \quad (6)$$

$$\tan \theta = 2.23158 \quad (7)$$

Odakle je:

$$\theta = \arctan(2.23158) \approx 65.89^\circ$$

Rješavanje za početnu brzinu v_0

Iz jednačine (6), uz $g = 9,81$ i $\theta \approx 65,89^\circ$:

$$v_0^2 = \frac{g}{2 \cdot 0.04521 \cdot \cos^2 \theta}$$

$$\cos(65.89^\circ) \approx 0.408$$

$$v_0^2 = \frac{9.81}{2 \cdot 0.04521 \cdot (0.408)^2} \approx \frac{9.81}{0.01505} \approx 651.89$$

$$v_0 \approx \sqrt{651.89} \approx 25.53 \text{ jedinica/s}$$

Rezultati matematičkog modelovanja putanje vodenog mlaza putem Lagranžove interpolacije i mehanike projektila ukazuju na optimalne parametre koji osiguravaju postizanje željene visine i dometa. Određeni optimalni ugao izbacivanja iznosi $\theta = 65,89^\circ$, dok je početna brzina vode potrebna za ostvarenje ove putanje $v_0 = 25,53$ jedinica u sekundi. Ovi rezultati predstavljaju kompromis između vertikalnog i horizontalnog dometa, omogućavajući dizajn sigurnih i estetski privlačnih vodenih atrakcija.

Izračunavanje maksimalne visine vodenog mlaza

Maksimalna visina vodenog mlaza može se izračunati pomoću formule za maksimalnu visinu projektila [5]:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

množenje u brojiocu

$$v_0^2 \sin^2 \theta \approx 651.96 \times 0.833 \approx 543.08$$

množenje u imeniocu

$$2g = 2 \times 9.81 = 19.62$$

Konačni rezultat maksimalne visine je

$$H_{\max} \approx \frac{543.08}{19.62} \approx 27.68$$

Maksimalna visina vodenog mlaza, prema dobijenim parametrima, iznosi približno 27,68. Ova vrijednost osigurava da mlaz dostigne željenu visinu, što je ključno za sigurnost i estetiku vodenih atrakcija.

Maksimalna visina vodenog mlaza postiže se kada ugao izbacivanja θ teži 90° odnosno kada vertikalna komponenta brzine postane dominantna. Prema formuli za maksimalnu visinu:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}.$$

Visina raste s kvadratom sinusa ugla. Kada $\theta \rightarrow 90^\circ$, $\sin(\theta) \rightarrow 1$, što znači da maksimalna visina teoretski dostiže svoju gornju granicu:

$$H_{\max}^{\text{teor}} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Međutim, u praksi, ugao od tačno 90° nije koristan jer voda tada ne bi imala horizontalnu komponentu kretanja ($v_{0x} = v_0 \cos \theta \rightarrow 0$) već bi padala direktno na izlaz mlaznice. Stoga se optimalni ugao (npr. 65.89° u ovom istraživanju) bira kao kompromis između visine i dometa, osiguravajući da voda dosegne željenu nadmorsku visinu i pređe potrebnu horizontalnu udaljenost.

Varijacija početne brzine i ugla izlaznog mlaza

Ugao (θ)	Početna brzina (v_0)	Maks. visina ($H_{\max}$)	Domet (l)	F-ja putanje $y(x)$
30	15	2,87	19,86	$-0,032x^2+0,577x$
30	20	5,10	35,31	$-0,018x^2+0,577x$
30	25	7,98	55,17	$-0,012x^2+0,577x$
45	15	5,74	22,94	$-0,021x^2+1,000x$
45	20	10,19	40,79	$-0,012x^2+1,000x$
45	25	15,92	63,73	$-0,008x^2+1,000x$
65,89	15	9,78	16,42	$-0,045x^2+2,232x$
65,89	20	17,39	29,20	$-0,025x^2+2,232x$
65,89	25	27,68	45,63	$-0,016x^2+2,232x$

Tabela 6: Varijacija parametara putanje vodenog mlaza u zavisnosti od ugla i početne brzine

Analiza prikazanih podataka otkriva ključne obrasce u ponašanju vodenih mlazova, pri fiksnom uglu od 30°, povećanje početne brzine sa 15 na 25 jedinica/s uzrokuje porast maksimalne visine sa 2,87 na 7,97 jedinica (2,8 puta), dok se domet povećava sa 19,86 na 55,17 jedinica (2,7 puta). Slično, pri konstantnoj brzini od 20 jedinica/s, promjena ugla sa 30° na 45° dovodi do povećanja maksimalne visine sa 5,10 na 10,19 jedinica, uz istovremeni porast dometa sa 35,31 na 40,79 jedinica. Karakteristično je da se kod ekstremnog ugla od 65,89° postiže značajno veća visina (27,68 jedinica pri 25 jedinica/s), ali uz znatno manji domet (45,63 jedinica) u odnosu na niže uglove, što potvrđuje postojanje kompromisa između vertikalnog i horizontalnog dometa. Ovi rezultati jasno pokazuju kako pažljivim odabirom kombinacije ugla i brzine možemo precizno kontrolisati karakteristike putanje, što je od presudnog značaja za projektovanje vodenih atrakcija.

Diskusija

Istraživanje prikazano u radu pruža značajan doprinos razumijevanju dinamike vodenih mlazova u zabavnim parkovima, ali otvara i brojna pitanja za daljnju analizu. Klasični pristup mehanike projektila, iako koristan za početnu aproksimaciju, pokazuje određena ograničenja kada se primjenjuje na stvarne vodene atrakcije. Dobijeni rezultati za optimalni ugao od 65,89° i početnu brzinu od 25,53 jedinica/s jasno ukazuju na kompromis između vertikalnog i horizontalnog dometa, što je u skladu s teorijskim očekivanjima. Međutim, činjenica da Model 2 ($R^2 = 0,954$) pokazuje bolju prediktivnu snagu od Modela 1 ($R^2 = 0,909$) sugerira da kvadratna aproksimacija nije uvijek dovoljna za precizno opisivanje kompleksnijih putanja, posebno u ekstremnim tačkama (D i F). Jedno od ključnih ograničenja ovog istraživanja je zanemarivanje otpora vazduha, što može značajno uticati na stvarne performanse mlazova. U stvarnim uslovima, trenje s vazduhom uzrokuje gubitak energije, što rezultuje smanjenjem dometa za 5–15%, zavisno od brzine i konfiguracije mlaza. Ovo je posebno važno za atrakcije u otvorenim prostorima gdje vjetar može dodatno poremetiti putanju. Nadalje, pretpostavka o homogenosti mlaza vode takođe je pojednostavljena, jer u praksi mlazevi često imaju složeniju strukturu s varijabilnom gustoćom i kapljičnom distribucijom. Ovaj rad otvara nekoliko smjerova za dalja istraživanja. Numeričke simulacije korištenjem CFD (Computational Fluid Dynamics) softvera omogućile bi detaljniju analizu uticaja otpora vazduha i drugih hidrodinamičkih efekata. Eksperimentalna validacija s visokobrzinskim kamerama i laserskim senzorima mogla bi pružiti preciznije podatke o stvarnoj putanji mlaza. Osim tehničkih aspekata, ovo istraživanje ima i praktične implikacije za dizajn atrakcija. Na primjer, kombinacija više mlazova s različitim parametrima mogla bi stvoriti kompleksnije vizualne efekte, dok bi kontrolisani raspršivači mogli osigurati optimalnu ravnotežu između spektakularnosti i uštede vode. Iako ovaj rad pruža vrijedne teorijske osnove, njegova prava vrijednost leži u podsticanju

daljeg interdisciplinarnog istraživanja koje će spojiti fizičke principe s modernim tehnologijama, čime će se unaprijediti dizajn sigurnijih, efikasnijih i estetski impresivnijih vodenih atrakcija.

Zaključak

Ovim istraživanjem potvrđeno je da se putanja vodenih mlazova u zabavnim parkovima može s zadovoljavajućom tačnošću modelovati primjenom klasičnih jednačina kretanja projektila i kvadratnih funkcija dobijenih Lagranžovom interpolacijom. Određeni optimalni parametri, ugao izbacivanja od približno $65,89^\circ$ i početna brzina od 25,53 jedinica/s predstavljaju idealan kompromis između postizanja željene maksimalne visine od 27.68 jedinica i potrebnog horizontalnog dometa, što je od ključnog značaja za projektovanje sigurnih i estetski privlačnih atrakcija koje ne ugrožavaju posjetioce. Iako je pojednostavljeni model, koji zanemaruje otpor vazduha, pokazao visoku prediktivnu moć (objašnjavajući preko 95% varijabilnosti podataka u Modelu 2), analiza reziduala ukazuje na granice njegove primjenjivosti u ekstremnim tačkama putanje. Ovo istraživanje stoga služi kao vrijedan teorijski temelj za početne faze projektovanja, istovremeno ističući nužnost uvođenja složenijih faktora u budućim radovima. Dalja unapređenja modela, uključujući numeričke simulacije uticaja otpora vazduha i prvenstveno eksperimentalnu validaciju, omogućiće stvaranje još preciznijih, efikasnijih i spektakularnijih vodenih atrakcija, čime će se premostiti jaz između klasične fizike i zahtjeva savremenog inženjerstva.

Literatura

- [1]Water tunnel effect: Aquatique show, creation and design of Water Tunnel effect (no date) Aquatique Show. Available at: <https://www.aquatic-show.com/en/our-services/water-tunnel> (pristupljeno: 3. avgust 2025).
- [2]GeeksforGeeks (2025) Lagrange interpolation formula: Proof, examples, and faqs, GeeksforGeeks. Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/maths/lagrange-interpolation-formula/> (pristupljeno: 3. avgust 2025).
- [3]Nevil, S. (no date) Coefficient of determination: How to calculate it and interpret the result, Investopedia. Available at: <https://www.investopedia.com/terms/c/coefficient-of-determination.asp> (pristupljeno: 03 August 2025).
- [4]Admin (2021) Trajectory formula, BYJUS. Available at: <https://byjus.com/trajectory-formula/> (pristupljeno: 03 August 2025).
- [5]Vedantu (2025) Equation of trajectory derivation - projectile motion for JEE Main 2025, VEDANTU. Available at: <https://www.vedantu.com/jee-main/physics-derivation-of-equation-of-trajectory> (pristupljeno: 03 August 2025).

MATHEMATICAL MODELING OF WATER JET TRAJECTORIES IN AMUSEMENT PARKS: APPLICATION OF LAGRANGE INTERPOLATION AND PROJECTILE MECHANICS

Author: MARIJA MALIĆ

Email: marijam658@gmail.com

Mentor: Assoc. Prof. Snježana Maksimović

Faculty of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, University of Banja Luka

Introduction: This study explores the physics of water jets in Disney attractions, applying a projectile motion model to design city fountains. The primary goal is to determine the optimal nozzle angle and initial water velocity to maximize jet height and span a tunnel path safely, ensuring water does not fall on passersby. The core hypothesis is that a specific angle-velocity combination exists for achieving this, using classical physics while neglecting air resistance.

Aim: The key tasks were to derive the jet's trajectory equation via Lagrange interpolation based on coordinates from a tunnel photograph, identify the optimal parameters for height and range, and examine the model's practical limits under realistic water velocities.

Materials and Methods: A geometric analysis of a tunnel photo was performed using GeoGebra to identify key trajectory points. Mathematical modeling employed Lagrange interpolation to fit a quadratic function. The standard projectile equations for range ($l = V_0^2 \sin(2\theta)/g$) and maximum height ($H_{max} = v_0^2 \sin^2\theta/(2g)$) were used for parameter optimization. Model validity was assessed using R^2 values.

Results: The trajectory was best described by quadratic functions, with $g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$ providing a better fit ($R^2 = 0.849$). The optimal parameters were an angle $\theta \approx 65.89^\circ$ and an initial velocity $v_0 \approx 25.53$ units/s. Slight errors at extreme points indicated the influence of unmodeled factors like air resistance.

Conclusion: The research confirms that water jet paths can be accurately modeled with quadratic projectile equations. The identified parameters are valuable for designing effective and safe water features. Future work should incorporate air resistance for greater realism.

Keywords: water jets; mathematical modeling; Lagrange interpolation; projectile equations; Disney parks; city fountains; R^2 analysis