

MATEMATIČKO MODELOVANJE PUTANJE VODENIH MLAZOVA U ZABAVNIM PARKOVIMA: PRIMJENA LAGRANŽOVE INTERPOLACIJE I MEHANIKE PROJEKTILA

Autor: MARIJA MALIĆ

e-mail: marijam658@gmail.com

Mentor: prof. dr Snježana Maksimović

Uvod: U ovom radu istražuje se fizika vodenih mlazova u atrakcijama Diznijevih parkova, sa akcentom na primjenu modela pri projektovanju sličnih fontana u parkovima. Cilj je matematički modelovati putanju vode radi određivanja optimalnog ugla i brzine izlaznog mlaza, koji omogućavaju da voda postigne maksimalnu visinu i pređe putanju bez pada na prolaznike. Pretpostavlja se da se putanja može opisati klasičnim jednačinama projektila uz zanemarivanje otpora vazduha.

Ciljevi: Potrebno je izvesti jednačinu putanje vodenog mlaza korištenjem Lagranžove interpolacije na osnovu koordinata dobijenih analizom fotografije tunela. Zatim treba odrediti optimalni ugao mlaznica i brzinu vode koja omogućava da voda dostigne željenu visinu i pređe tunel. Takođe je važno ispitati ograničenja modela, poput maksimalne visine pri realnim brzinama vode.

Materijal i metode: Istraživanje je provedeno kroz tri koraka. Prvo je urađena geometrijska analiza fotografije tunela u programu GeoGebra radi određivanja ključnih tačaka putanje. Zatim je putanja modelovana Lagranžovom interpolacijom radi pronalaženja kvadratne funkcije. Osnovna jednačina izvedena je iz klasičnih projektilnih modela. Treći korak obuhvata optimizaciju parametara pomoću jednačina za domet i maksimalnu visinu te provjeru tačnosti modela poređenjem R^2 vrijednosti.

Rezultati: Putanja vodenog mlaza može se opisati kvadratnim funkcijama $f(x) = -0,061826x^2 + 2,882x$ ($R^2 = 0,816$) i $g(x) = -0,04521x^2 + 2,23158x - 4,10237$ ($R^2 = 0,849$). Optimalni parametri su ugao $\theta \approx 65,89^\circ$ i brzina $v_0 \approx 25,53$ jedinica/s. Drugi model pokazuje veću tačnost, iako greške u ekstremima ukazuju na uticaj zanemarenih faktora.

Zaključak: Istraživanje potvrđuje da se putanja vodenog mlaza može modelovati klasičnim jednačinama projektila uz zadovoljavajuću tačnost. Dobijeni rezultati korisni su za projektovanje sigurnih i estetski privlačnih atrakcija. Budući radovi treba da uključe otpor vazduha radi veće preciznosti.

Ključne riječi: vodeni mlazovi, matematičko modeliranje, Lagranžova interpolacija, jednačina projektila, Diznijevi parkovi, gradske fontane, R^2 analiza.

Uvod

Vodene atrakcije u zabavnim parkovima i gradskim fontanama predstavljaju fascinantnu sintezu umjetnosti i inženjerstva, gdje precizno projektovani mlazovi vode stvaraju vizuelno impresivne, a istovremeno sigurne prolaze za posjetioce. Lična posjeta Diznijevom parku u Parizu poslužila je kao katalizator za ovo istraživanje. Uvid u njegov koncept podstakao je komparaciju s drugim lokacijama, što je dovelo do otkrića da Diznilend u Kaliforniji posjeduje jedinstvene vodene atrakcije. Međutim, dizajn ovakvih vodenih sistema često se oslanja na empirijske metode i ponavljanje postojećih rješenja, što može dovesti do neoptimalnih performansi za određeni slučaj. Ovaj rad istražuje primjenu klasične mehanike projektila na modelovanje putanje vodenih mlazova, s ciljem da se matematički odrede optimalni parametri kao što su početna brzina i ugao izbacivanja, koji osiguravaju maksimalnu visinu i željeni domet, uz istovremeno očuvanje sigurnosti posjetilaca. Kroz ovu analizu, rad nastoji pružiti praktične smjernice za projektovanje učinkovitijih i pouzdanijih vodenih atrakcija.

U posljednjim decenijama, hidrodinamički efekti u zabavnim parkovima postali su predmet intenzivnog istraživanja, posebno u kontekstu unapređenja estetike i funkcionalnosti fontana i vodenih tunela. Iako kompleksne numeričke simulacije koje uzimaju u obzir otpor vazduha, promjenljivu gustinu vode i druge parametre postoje, one su često previše složene za brzu procjenu u ranim fazama projektovanja. Ovaj rad, stoga, koristi pojednostavljeni model klasične putanje projektila, koji omogućava brzu i intuitivnu analizu uz zadovoljavajuću tačnost. Odabir fotografije za analizu nije slučajna, već je zasnovan na njenoj sposobnosti da jasno i precizno prikaže ključni element istraživanja, više paraboličnih oblika vodenih mlazova kroz koje posjetioci prolaze.

Glavni ciljevi rada su višestruki. Prvo, kroz geometrijsku analizu fotografije vodenog tunela u Diznijevom parku, pomoću GeoGebre, izdvajaju se ključne tačke putanje mlaza. Zatim se Lagranžova interpolacija primjenjuje za konstrukciju kvadratne funkcije koja najbolje opisuje ovu putanju. Drugi korak uključuje izvođenje jednačina kretanja projektila i njihovo povezivanje s dobijenom interpolacijom, kako bi se odredili optimalni ugao i brzina. Konačno, validacija modela vrši se poređenjem R^2 vrijednosti za različite aproksimacije, što omogućava procjenu pouzdanosti predloženog rješenja. Rad otvara vrata za daljnja istraživanja, koja bi kombinovala eleganciju klasične fizike s preciznošću modernih numeričkih metoda.

Materijal i metode

Vodeni tunel će biti unesen u softver GeoGebra kako bi se ucrtale koordinate na krajnjim tačkama putanje vodenog mlaza. Nakon što se dobiju koordinate, ključni zadatak će biti određivanje funkcije krive, $f(x)$. U ovom istraživanju, putanja vodenog mlaza

modelovana je korištenjem klasičnih jednačina kretanja projektila, uz zanemarivanje otpora vazduha. U modelovanju putanje vodenih mlazova, otpor vazduha je svjesno isključen iz analize iz dva ključna razloga, koji omogućavaju balans između preciznosti i praktične primjenljivosti. Prvo, uključivanje otpora vazduha zahtijeva rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina koje značajno komplikuju analitičko rješenje, dok primjena numeričkih metoda prelazi okvire i ciljeve ovog istraživanja. Drugo, za relativno kratke domete koji ne prelaze 50 metara i brzine mlaza u rasponu od 25 do 30 metara u sekundi, uticaj otpora vazduha na oblik parabole putanje je zanemariv.

Iako ovaj pojednostavljeni pristup omogućuje elegantno matematičko rješenje, važno je naglasiti njegova bitna ograničenja. U stvarnim uslovima, mlazevi vode gube energiju zbog trenja sa vazduhom, što rezultuje smanjenjem dometa i maksimalne visine. Da je otpor vazduha uključen u model, analiza pokazuje da bi optimalni ugao izlaska vode bio nešto niži, kako bi se kompenzovao gubitak energije. Ove korekcije postaju posebno relevantne u preciznijim inženjerskim proračunima i detaljnijim simulacijama, gdje se zahtijeva veća tačnost predviđanja putanje. Stoga, iako početni model pruža korisne smjernice, njegove pretpostavke treba imati na umu prilikom praktične primjene.

Za nastavak istraživanja potrebno dodatno objasniti koncept Lagranžove [2] interpolacije. Lagranžova interpolacija je numerička metoda za pronalaženje polinoma najnižeg mogućeg stepena koji tačno prolazi kroz skup unaprijed zadatih tačaka (x_i, y_i) . To je posebno korisno kada treba aproksimirati nepoznatu funkciju na osnovu ograničenog broja mjerenja ili podataka. U ovom slučaju, koristimo je za pronalaženje kvadratne funkcije (polinom drugog stepena), koja najbolje opisuje putanju vodenog mlaza. Ključna prednost ove metode je što ne zahtijeva da tačke budu ravnomjerno raspoređene duž x-ose.

Lagranžov polinom je oblika:

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 \\ + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_3 - x_n)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Kada pravimo statistički model, prvo što nas zanima je koliko dobro on funkcioniše. Koeficijent determinacije u oznaci R^2 nam daje brz odgovor na to pitanje. Ovaj broj između 0 i 1 pokazuje koliki dio varijacija u podacima naš model uspijeva da objasni. Savršen model bi imao R^2 jednak 1, što znači da savršeno predviđa sve vrijednosti. Sa druge strane, ako je R^2 nula, to znači da naš model ne radi. [3]

Rezultati



Slika 1: Određivanje tačaka na putanji mlaza [1]

Proces određivanja koordinata ključnih tačaka putanje vodenog mlaza izveden je korišćenjem programa GeoGebra, kombinujući ručni odabir tačaka sa preciznim digitalnim mjerenjem. Kao osnova korišćena je fotografija vodenog tunela iz Diznijevog parka, koja je unesena u GeoGebru kao pozadinski sloj.

Ručnim odabirom tačaka su identifikovane tri ključne pozicije koje definišu putanju mlaza. Tačka A (0, 0) označava izlaz mlaza iz fontane i postavljena je kao koordinatni početak. Tačka B (23,34; 33,60) predstavlja vrh parabole odnosno poziciju maksimalne visine mlaza, dok tačka C (46,62; 0) označava mjesto gdje voda ponovo pada na tlo, čime se zatvara luk putanje. Nakon ručnog postavljanja markera, GeoGebrin alat za precizno mjerenje omogućio je dobijanje koordinata sa visokom tačnošću (npr. B = (23,341189; 33,596998), koje su zatim sačuvane za dalju matematičku analizu. Ovaj ručni pristup odabira tačaka unosi određenu grešku, koja proističe iz ograničenja rezolucije originalne fotografije i subjektivnosti u određivanju tačnih pozicija. Iako je ova greška prihvatljiva za potrebe ovog istraživanja, za buduće radove koji zahtijevaju veću preciznost preporučuje se korišćenje automatizovanih metoda obrade slike, kao što su OpenCV algoritmi za detekciju ivica, koji bi eliminisali subjektivnu komponentu u određivanju koordinata. Međutim, takav pristup zahtijeva dodatne programske resurse i vještine koje nisu bile u okviru ovog istraživanja.

Tačke	X	Y
A	0,000	0,000
B	23,3411891202261	33,5969984101409
C	46,6195012828264	0,000

Tabela 1: Koordinate koje definišu parabolu (plava boja)

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti iz tabele:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{(x - 23.3411891202261)(x - 46.6195012828264)}{(0.000 - 23.3411891202261)(0.000 - 46.6195012828264)} \cdot 0.000 \\
 & + \frac{(x - 0.000)(x - 46.6195012828264)}{(23.3411891202261 - 0.000)(23.3411891202261 - 46.6195012828264)} \cdot 33.5969984101409 \\
 & + \frac{(x - 0.000)(x - 23.3411891202261)}{(46.6195012828264 - 0.000)(46.6195012828264 - 23.3411891202261)} \cdot 0.000
 \end{aligned}$$

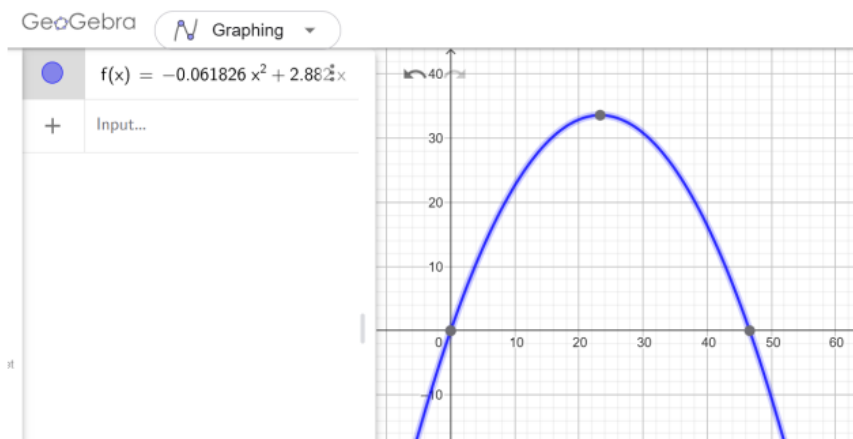
Pošto su $y_A = 0$ i $y_C = 0$ formula se pojednostavljuje na:

$$f(x) = \frac{x(x - 46.6195012828264)}{23.3411891202261 \cdot (-23.2783121626003)} \cdot 33.5969984101409$$

Nakon pojednostavljenja, funkcija parabole u kvadratnom obliku glasi:

$$f(x) = -0.061826x^2 + 2.882x$$

$$f(x) \approx -0.061826x^2 + 2.882x$$



Slika 2: Grafik $f(x)$

Nakon izračunavanja i pojednostavljenja Lagranžovog interpolacionog polinoma za prvi model, biramo tačke D, E i F, koje su tačke drugog modela, zelene parabole, koju treba da odredimo i iskoristimo za poređenje:



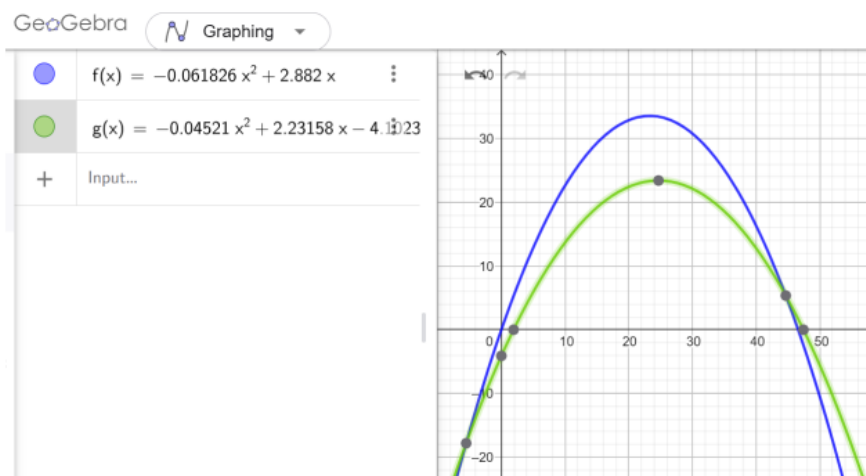
Slika 3: Određivanje tačaka drugog mlaza D, E, F

Tačke	X	Y
D	4,019755728665	2,7887018609595
E	23,3878379240788	29,6832408680624
F	43,5587421794061	2,0862325585351

Tabela 2: Koordinate koje definišu drugu parabolu (zelena boja)

Dobijamo kvadratnu funkciju:

$$g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$$



Slika 4: Grafici $f(x)$ i $g(x)$

Analiza dobijenih funkcija preko koeficijenta determinacije u oznaci R^2

Posmatranjem sledećih tačaka analiziraćemo 2 modela:

Tačka	(x;y)
A	(0,0;0,0)
B	(23,341;33,597)
C	(46,620;0,0)
D	(4,020;2,789)
E	(23,388;29,683)
F	(43,559;2,086)

Tabela 3: Koordinate tačaka

Model 1

$$f(x) = -0.061826x^2 + 2.882x$$

Model 2

$$g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$$

Predviđanja modela

Tačka	Model	$y_{stvarni}$	$y_{predviđeni}$
A	1	0,000	0,000
B	1	33,597	29,678
C	1	0,000	-9,934
D	2	2,789	4,141
E	2	29,683	29,693
F	2	2,086	-5,359

Tabela 4: Predviđene i stvarne vrijednosti po modelima

Suma kvadrata reziduala (SSE)

Reziduali su razlike između stvarnih vrijednosti i onoga što je model predvidio, odnosno greške. Suma kvadrata reziduala sabira kvadrate svih tih grešaka.

Ukupna suma kvadrata (SSE)

$$\begin{aligned}SSE_1 &= (0.000 - 0.000)^2 + (33.597 - 29.678)^2 + (0.000 - (-9.934))^2 \\&= 0.000 + 15.355 + 98.684 = 114.04\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SSE_2 &= (2.789 - 4.141)^2 + (29.683 - 29.693)^2 + (2.086 - (-5.359))^2 \\&= 1.828 + 0.000 + 55.419 = 57.25\end{aligned}$$

Ukupna suma kvadrata (SST)

Ovo je mjerilo ukupne varijacije u podacima. Računa se kao zbir kvadrirane razlike između svake stvarne vrijednosti $y_{stvarni}$ i prosjeka svih stvarnih vrijednosti $\bar{y}$. Ovo je isto za oba modela jer zavisi samo od originalnih podataka.

$$\bar{y} = \frac{0.000 + 33.597 + 0.000 + 2.789 + 29.683 + 2.086}{6} \approx 11.36$$

$$\begin{aligned}SST &= (0.000 - 11.360)^2 + (33.597 - 11.360)^2 + (0.000 - 11.360)^2 \\&\quad + (2.789 - 11.360)^2 + (29.683 - 11.360)^2 + (2.086 - 11.360)^2 \\&= 129.050 + 494.114 + 129.05 \\&\quad + 73.472 + 336.848 + 86.022 = 1248.56\end{aligned}$$

Koeficijent determinacije (R^2) se računa po formuli

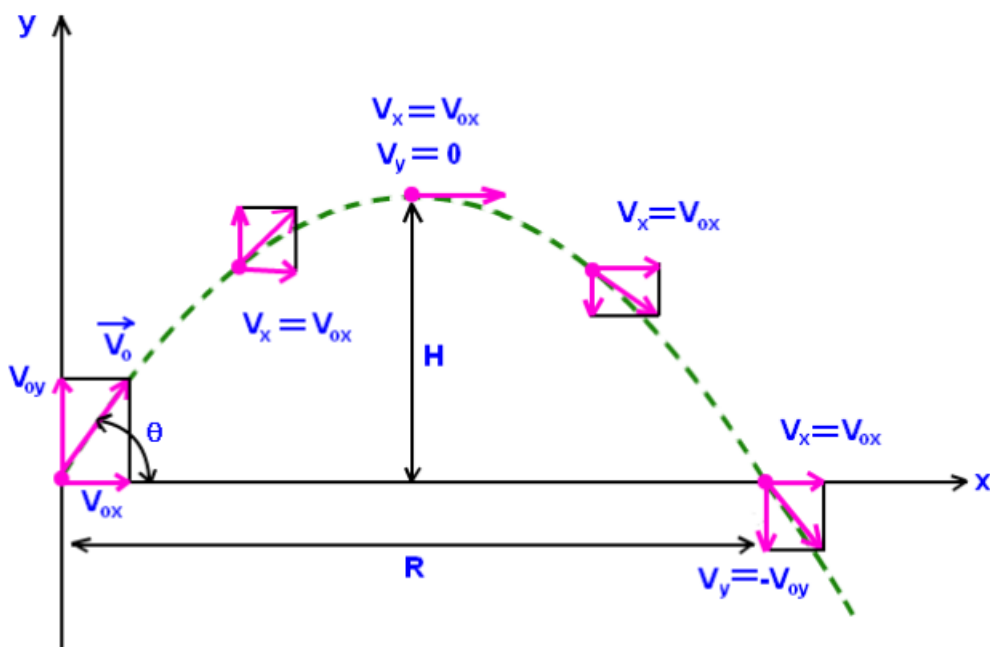
$$R_1^2 = 1 - \frac{SSE_1}{SST} = 1 - \frac{114.04}{1248.56} = 0.91$$

$$R_2^2 = 1 - \frac{SSE_2}{SST} = 1 - \frac{57.25}{1248.56} = 0.95$$

Analiza pokazuje da Model 1 uspješno objašnjava 90,9% varijabilnosti podataka ($R^2=0,909$), dok Model 2 pokazuje nešto bolje performanse sa 95,4% objašnjene varijance ($R^2=0,954$). Oba modela demonstriraju zadovoljavajuću prediktivnu snagu, pri čemu Model 2 ima blagu prednost u tačnosti. Najznačajnije greške u predviđanjima uočene su kod tačaka D ($x = 4,020$) i F ($x = 43,559$), što ukazuje na potencijalne granice primjenjivosti ovih modela u ekstremnim vrijednostima.

Putanja projektila

Projektil se ispaljuje početnom brzinom v_0 pod uglom θ u odnosu na horizontalnu ravan. Pri analizi se zanemaruje otpor vazduha kao i efekti rotacije Zemlje. Jedina sila koja deluje na projektil nakon ispaljivanja je sila Zemljine teže, koja daje konstantno ubrzanje g usmjereno vertikalno nadolje. Ova analiza važi za idealan slučaj kretanja projektila u vakuumu.



Slika 5: Putanja projektila prema standardnoj formuli [4]

Početna brzina se može rastaviti na komponente:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta & (\text{horizontalna komponenta}) \\ v_y &= v_0 \sin \theta & (\text{vertikalna komponenta}) \end{aligned}$$

kretanje u x-pravcu je dato sa:

$$x(t) = v_x t = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (1)$$

Dok je kretanje u y-pravcu dato sa:

$$y(t) = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

iz jednačine (1) dobijemo vrijeme t, koje uvrstimo u jednačinu (2):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y(x) = v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

Prema tome, konačna jednačina putanje je (5):

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (3)$$

Nakon dobijene jednačine krive (3), koeficijenti kvadratne jednačine krive se izjednačavaju sa koeficijentima jednačine putanje kako bi se pronašao ugao izlaznih otvora za vodu. Ovaj ugao će zatim biti korišćen za određivanje odgovarajuće brzine kojom voda mora isteći kako bi prešla unaprijed određeni horizontalni domet i visinu zadatu koordinatama. Pri istom uglu izlaznih otvora, odrediće se maksimalna visina koja može biti postignuta putanjom vode. Za ovo je potrebna jednačina dometa kako bi se osiguralo da ugao i brzina vode za maksimalnu visinu pokrivaju fiksni horizontalni domet tunela. U tački gdje putanja vode dopijeva na tlo, y-vrijednost će biti 0. X-vrijednost predstavlja horizontalno pomjeranje. Stoga se jednačina putanje može izjednačiti sa 0 kako bi se pronašao domet.

Određivanje dometa

Maksimalna udaljenost koju pređu mlazovi vode može se dobiti iz koordinata tačaka $A(x_1, y_1)$ i $C(x_2, y_2)$ pomoću opšte jednačine za domet:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

U tabeli 5 su date koordinate zelenih tačaka:

Tačke	X	Y
D	4,019755728665	2,7887018609595
E	23,3878379240788	29,6832408680624
F	43,5587421794061	2,0862325585351

Tabela 5: Koordinate zelenih tačaka

pa je domet:

$$\begin{aligned}
 l_{DF} &= \sqrt{(43.5587421794061 - 4.019755728665)^2 + (2.0862325585351 - 2.7887018609595)^2} \\
 &= \sqrt{(39.5389864507411)^2 + (-0.7024693024244)^2} \\
 &= \sqrt{1563.3314 + 0.4935} \\
 &= \sqrt{1563.8249} \\
 &\approx 39.54 \text{ (jedinica)}
 \end{aligned}$$

U ovom radu nisu korištene apsolutne mjerne jedinice poput metara ili centimetara, jer početna slika nije sadržavala nikakve referentne dimenzije koje bi omogućile skaliranje. Svi rezultati su prikazani u relativnim jedinicama.

Izračunavanje ugla θ i početne brzine v_0

Ako posmatramo Model 2, jednačine putanje su:

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (4)$$

$$y(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237 \quad (5)$$

U procesu izjednačavanja jednačina putanje, nije moguće direktno izjednačiti cjelokupne funkcije jer model projektila (4) pretpostavlja da putanja polazi od tačke (0,0), dok empirijski dobijena funkcija (5) ima konstantni član različit od nule, što ukazuje na pomjeren koordinatni početak. Stoga se koristi metod izjednačavanja koeficijenata, koji omogućava upoređivanje oblika krive zanemarujući apsolutni položaj.

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^2 i x dobijamo

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = -0.04521 \quad (6)$$

$$\tan \theta = 2.23158 \quad (7)$$

Odakle je:

$$\theta = \arctan(2.23158) \approx 65.89^\circ$$

Rješavanje za početnu brzinu v_0

Iz jednačine (6), uz $g = 9,81$ i $\theta \approx 65,89^\circ$:

$$v_0^2 = \frac{g}{2 \cdot 0.04521 \cdot \cos^2 \theta}$$

$$\cos(65.89^\circ) \approx 0.408$$

$$v_0^2 = \frac{9.81}{2 \cdot 0.04521 \cdot (0.408)^2} \approx \frac{9.81}{0.01505} \approx 651.89$$

$$v_0 \approx \sqrt{651.89} \approx 25.53 \text{ jedinica/s}$$

Rezultati matematičkog modelovanja putanje vodenog mlaza putem Lagranžove interpolacije i mehanike projektila ukazuju na optimalne parametre koji osiguravaju postizanje željene visine i dometa. Određeni optimalni ugao izbacivanja iznosi $\theta = 65,89^\circ$, dok je početna brzina vode potrebna za ostvarenje ove putanje $v_0 = 25,53$ jedinica u sekundi. Ovi rezultati predstavljaju kompromis između vertikalnog i horizontalnog dometa, omogućavajući dizajn sigurnih i estetski privlačnih vodenih atrakcija.

Izračunavanje maksimalne visine vodenog mlaza

Maksimalna visina vodenog mlaza može se izračunati pomoću formule za maksimalnu visinu projektila [5]:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

množenje u brojiocu

$$v_0^2 \sin^2 \theta \approx 651.96 \times 0.833 \approx 543.08$$

množenje u imeniocu

$$2g = 2 \times 9.81 = 19.62$$

Konačni rezultat maksimalne visine je

$$H_{\max} \approx \frac{543.08}{19.62} \approx 27.68$$

Maksimalna visina vodenog mlaza, prema dobijenim parametrima, iznosi približno 27,68. Ova vrijednost osigurava da mlaz dostigne željenu visinu, što je ključno za sigurnost i estetiku vodenih atrakcija.

Maksimalna visina vodenog mlaza postiže se kada ugao izbacivanja θ teži 90° odnosno kada vertikalna komponenta brzine postane dominantna. Prema formuli za maksimalnu visinu:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}.$$

Visina raste s kvadratom sinusa ugla. Kada $\theta \rightarrow 90^\circ$, $\sin(\theta) \rightarrow 1$, što znači da maksimalna visina teoretski dostiže svoju gornju granicu:

$$H_{\max}^{\text{teor}} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Međutim, u praksi, ugao od tačno 90° nije koristan jer voda tada ne bi imala horizontalnu komponentu kretanja ($v_{0x} = v_0 \cos \theta \rightarrow 0$) već bi padala direktno na izlaz mlaznice. Stoga se optimalni ugao (npr. 65.89° u ovom istraživanju) bira kao kompromis između visine i dometa, osiguravajući da voda dosegne željenu nadmorsku visinu i pređe potrebnu horizontalnu udaljenost.

Varijacija početne brzine i ugla izlaznog mlaza

Ugao (θ)	Početna brzina (v_0)	Maks. visina ($H_{\max}$)	Domet (l)	F-ja putanje $y(x)$
30	15	2,87	19,86	$-0,032x^2+0,577x$
30	20	5,10	35,31	$-0,018x^2+0,577x$
30	25	7,98	55,17	$-0,012x^2+0,577x$
45	15	5,74	22,94	$-0,021x^2+1,000x$
45	20	10,19	40,79	$-0,012x^2+1,000x$
45	25	15,92	63,73	$-0,008x^2+1,000x$
65,89	15	9,78	16,42	$-0,045x^2+2,232x$
65,89	20	17,39	29,20	$-0,025x^2+2,232x$
65,89	25	27,68	45,63	$-0,016x^2+2,232x$

Tabela 6: Varijacija parametara putanje vodenog mlaza u zavisnosti od ugla i početne brzine

Analiza prikazanih podataka otkriva ključne obrasce u ponašanju vodenih mlazova, pri fiksnom uglu od 30°, povećanje početne brzine sa 15 na 25 jedinica/s uzrokuje porast maksimalne visine sa 2,87 na 7,97 jedinica (2,8 puta), dok se domet povećava sa 19,86 na 55,17 jedinica (2,7 puta). Slično, pri konstantnoj brzini od 20 jedinica/s, promjena ugla sa 30° na 45° dovodi do povećanja maksimalne visine sa 5,10 na 10,19 jedinica, uz istovremeni porast dometa sa 35,31 na 40,79 jedinica. Karakteristično je da se kod ekstremnog ugla od 65,89° postiže značajno veća visina (27,68 jedinica pri 25 jedinica/s), ali uz znatno manji domet (45,63 jedinica) u odnosu na niže uglove, što potvrđuje postojanje kompromisa između vertikalnog i horizontalnog dometa. Ovi rezultati jasno pokazuju kako pažljivim odabirom kombinacije ugla i brzine možemo precizno kontrolisati karakteristike putanje, što je od presudnog značaja za projektovanje vodenih atrakcija.

Diskusija

Istraživanje prikazano u radu pruža značajan doprinos razumijevanju dinamike vodenih mlazova u zabavnim parkovima, ali otvara i brojna pitanja za daljnju analizu. Klasični pristup mehanike projektila, iako koristan za početnu aproksimaciju, pokazuje određena ograničenja kada se primjenjuje na stvarne vodene atrakcije. Dobijeni rezultati za optimalni ugao od 65,89° i početnu brzinu od 25,53 jedinica/s jasno ukazuju na kompromis između vertikalnog i horizontalnog dometa, što je u skladu s teorijskim očekivanjima. Međutim, činjenica da Model 2 ($R^2 = 0,954$) pokazuje bolju prediktivnu snagu od Modela 1 ($R^2 = 0,909$) sugerise da kvadratna aproksimacija nije uvijek dovoljna za precizno opisivanje kompleksnijih putanja, posebno u ekstremnim tačkama (D i F). Jedno od ključnih ograničenja ovog istraživanja je zanemarivanje otpora vazduha, što može značajno uticati na stvarne performanse mlazova. U stvarnim uslovima, trenje s vazduhom uzrokuje gubitak energije, što rezultuje smanjenjem dometa za 5–15%, zavisno od brzine i konfiguracije mlaza. Ovo je posebno važno za atrakcije u otvorenim prostorima gdje vjetar može dodatno poremetiti putanju. Nadalje, pretpostavka o homogenosti mlaza vode takođe je pojednostavljene, jer u praksi mlazevi često imaju složeniju strukturu s varijabilnom gustoćom i kapljičnom distribucijom. Ovaj rad otvara nekoliko smjerova za dalja istraživanja. Numeričke simulacije korištenjem CFD (Computational Fluid Dynamics) softvera omogućile bi detaljniju analizu uticaja otpora vazduha i drugih hidrodinamičkih efekata. Eksperimentalna validacija s visokobrzinskim kamerama i laserskim senzorima mogla bi pružiti preciznije podatke o stvarnoj putanji mlaza. Osim tehničkih aspekata, ovo istraživanje ima i praktične implikacije za dizajn atrakcija. Na primjer, kombinacija više mlazova s različitim parametrima mogla bi stvoriti kompleksnije vizualne efekte, dok bi kontrolisani raspršivači mogli osigurati optimalnu ravnotežu između spektakularnosti i uštede vode. Iako ovaj rad pruža vrijedne teorijske osnove, njegova prava vrijednost leži u podsticanju

daljeg interdisciplinarnog istraživanja koje će spojiti fizičke principe s modernim tehnologijama, čime će se unaprijediti dizajn sigurnijih, efikasnijih i estetski impresivnijih vodenih atrakcija.

Zaključak

Ovim istraživanjem potvrđeno je da se putanja vodenih mlazova u zabavnim parkovima može s zadovoljavajućom tačnošću modelovati primjenom klasičnih jednačina kretanja projektila i kvadratnih funkcija dobijenih Lagranžovom interpolacijom. Određeni optimalni parametri, ugao izbacivanja od približno $65,89^\circ$ i početna brzina od 25,53 jedinica/s predstavljaju idealan kompromis između postizanja željene maksimalne visine od 27.68 jedinica i potrebnog horizontalnog dometa, što je od ključnog značaja za projektovanje sigurnih i estetski privlačnih atrakcija koje ne ugrožavaju posjetioce. Iako je pojednostavljeni model, koji zanemaruje otpor vazduha, pokazao visoku prediktivnu moć (objašnjavajući preko 95% varijabilnosti podataka u Modelu 2), analiza reziduala ukazuje na granice njegove primjenjivosti u ekstremnim tačkama putanje. Ovo istraživanje stoga služi kao vrijedan teorijski temelj za početne faze projektovanja, istovremeno ističući nužnost uvođenja složenijih faktora u budućim radovima. Dalja unapređenja modela, uključujući numeričke simulacije uticaja otpora vazduha i prvenstveno eksperimentalnu validaciju, omogućiće stvaranje još preciznijih, efikasnijih i spektakularnijih vodenih atrakcija, čime će se premostiti jaz između klasične fizike i zahtjeva savremenog inženjerstva.

Literatura

- [1]Water tunnel effect: Aquatique show, creation and design of Water Tunnel effect (no date) Aquatique Show. Available at: <https://www.aquatic-show.com/en/our-services/water-tunnel> (pristupljeno: 3. avgust 2025).
- [2]GeeksforGeeks (2025) Lagrange interpolation formula: Proof, examples, and faqs, GeeksforGeeks. Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/maths/lagrange-interpolation-formula/> (pristupljeno: 3. avgust 2025).
- [3]Nevil, S. (no date) Coefficient of determination: How to calculate it and interpret the result, Investopedia. Available at: <https://www.investopedia.com/terms/c/coefficient-of-determination.asp> (pristupljeno: 03 August 2025).
- [4]Admin (2021) Trajectory formula, BYJUS. Available at: <https://byjus.com/trajectory-formula/> (pristupljeno: 03 August 2025).
- [5]Vedantu (2025) Equation of trajectory derivation - projectile motion for JEE Main 2025, VEDANTU. Available at: <https://www.vedantu.com/jee-main/physics-derivation-of-equation-of-trajectory> (pristupljeno: 03 August 2025).

MATHEMATICAL MODELING OF WATER JET TRAJECTORIES IN AMUSEMENT PARKS: APPLICATION OF LAGRANGE INTERPOLATION AND PROJECTILE MECHANICS

Author: MARIJA MALIĆ

Email: marijam658@gmail.com

Mentor: Assoc. Prof. Snježana Maksimović

Faculty of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, University of Banja Luka

Introduction: This study explores the physics of water jets in Disney attractions, applying a projectile motion model to design city fountains. The primary goal is to determine the optimal nozzle angle and initial water velocity to maximize jet height and span a tunnel path safely, ensuring water does not fall on passersby. The core hypothesis is that a specific angle-velocity combination exists for achieving this, using classical physics while neglecting air resistance.

Aim: The key tasks were to derive the jet's trajectory equation via Lagrange interpolation based on coordinates from a tunnel photograph, identify the optimal parameters for height and range, and examine the model's practical limits under realistic water velocities.

Materials and Methods: A geometric analysis of a tunnel photo was performed using GeoGebra to identify key trajectory points. Mathematical modeling employed Lagrange interpolation to fit a quadratic function. The standard projectile equations for range ($l = V_0^2 \sin(2\theta)/g$) and maximum height ($H_{max} = v_0^2 \sin^2\theta/(2g)$) were used for parameter optimization. Model validity was assessed using R^2 values.

Results: The trajectory was best described by quadratic functions, with $g(x) = -0.04521x^2 + 2.23158x - 4.10237$ providing a better fit ($R^2 = 0.849$). The optimal parameters were an angle $\theta \approx 65.89^\circ$ and an initial velocity $v_0 \approx 25.53$ units/s. Slight errors at extreme points indicated the influence of unmodeled factors like air resistance.

Conclusion: The research confirms that water jet paths can be accurately modeled with quadratic projectile equations. The identified parameters are valuable for designing effective and safe water features. Future work should incorporate air resistance for greater realism.

Keywords: water jets; mathematical modeling; Lagrange interpolation; projectile equations; Disney parks; city fountains; R^2 analysis